MP*/MPI* Semaine 1 : du 18 au 22 Septembre 2023
Groupes, Anneaux.

Révisions de 1ère année : calcul de sommes (binôme, nombres complexes)

I Groupes
1. Groupes, sous-groupes, produit cartésien de groupes, les sous-groupes de $\mathbb{Z}$. Morphismes de groupes.
2. Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ additif : congruence, définition. Les générateurs.
3. Groupes cycliques, parties génératrices. Structure des groupes monogènes
4. Ordre d'un élément. Seule la propriété "l'ordre d'un élément divise le cardinal du groupe" est au programme et ainsi que sa démonstration uniquement dans le cas d'un groupe commutatif. Le théorème de Lagrange est hors programme.

II Anneaux
La notion d'anneau quotient et d'anneau principal est hors programme. Tous les corps considérés sont commutatifs et les anneaux unitaires.
1. Anneau, sous anneau, morphisme d'anneaux, diviseur de zéro, binôme de Newton.
2. Idéal (dans un anneau commutatif), idéal engendré par une partie.
3. Cas des anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: définition de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, éléments inversibles.
Idéaux de $\mathbb{Z}$, arithmétique sur $\mathbb{Z}$ (révisions de MPSI), indicatrice d'Euler, petit théorème de Fermat, théorème d'Euler.

MP*/MPI* Semaine 2 : du 25 Septembre au 29 Septembre 2023
Anneaux, idéaux - Polynômes - Normes

Révisions de 1ère année : formule de Taylor, relations coefficients-racines pour les polynômes scindés, décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle,

II Anneaux
Les notion d'anneau quotient et d'anneau principal sont hors programme. Tous les corps considérés sont commutatifs. et les anneaux unitaires.
1. Anneau, sous anneau, morphisme d'anneaux, diviseur de zéro, binôme de Newton.
2. Idéal (dans un anneau commutatif), idéal engendré par une partie.
3. Cas des anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: définition de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, éléments inversibles.
Idéaux de $\mathbb{Z}$, arithmétique sur $\mathbb{Z}$ (révisions de MPSI), indicatrice d'Euler, petit théorème de Fermat, théorème d'Euler.
4. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ avec $\mathbb{K}$ un corps (sous-corps de $\mathbb{C}$).
Idéaux de $\mathbb{K}[X]$, arithmétique sur $\mathbb{K}[X]$ (révisions MPSI)

III Introduction à la topologie.
2. Espaces vectoriels normés
Norme, distance associée, distance à une partie, boules.
Norme euclidienne, norme produit sur un produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels, normes usuelles : sur $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

MP*/MPI* Semaine 3 : du 2 au 6 Octobre 2023
Polynômes - Introduction à la topologie

Révisions de première année : suites réelles et complexes, développements limités (pour l'étude des suites)

II Anneaux 4. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ avec $\mathbb{K}$ un corps (sous-corps de $\mathbb{C}$).
Idéaux de $\mathbb{K}[X]$, arithmétique sur $\mathbb{K}[X]$ (révisions MPSI)

III Introduction à la topologie.
2. Espaces vectoriels normés
Norme, distance associée, distance à une partie, boules. Notion de parties convexes.
Norme euclidienne, norme produit sur un produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels, normes usuelles : sur $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.
Fonctions lipschitziennes, normes équivalentes, cas des normes usuelles.
3. Suites d'un espace vectoriel normé
Suites convergentes, divergentes.
Suite extraite, valeur d'adhérence, théorème de Bolzano-Weierstrass ($\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$) (admis).
4. Topologie
Voisinage, ouvert, fermé, adhérence (définition, caractérisation comme intersection de fermés, caractérisation séquentielle), intérieur (définition, caractérisation), frontière.
Partie dense, caractérisation séquentielle d'un point adhérent, d'un fermé.
Topologie relative à une partie.

MP*/MPI* Semaine 4 : du 9 au 13 Octobre 2023
Suites et séries numériques

Révisions de première année : suites réelles et complexes, développements limités (pour l'étude des suites), séries numériques et familles sommables.

IV. Séries numériques
1. Dans le cas d'espace vectoriels normés (essentiellement de dimension finie) : sommes partielles, séries convergentes, somme, restes partiels, structure de l'ensemble des suites convergentes, convergence absolue, liens suites-séries. Définition exponentielle de matrice et exponentielle de $A+B$ (preuve exigible dans le cas complexe seulement)
2. Critère spécial à certaines séries alternées. Cas des séries entières (Seule la nature des séries numériques de type séries entières a été étudiée).
Définition du rayon de convergence, convergence (lemme d'Abel), rayon de convergence de la série dérivée formelle.
3. Compléments sur les séries complexes : règle de D'Alembert, technique de comparaison série-intégrale (la notion d'intégrabilité n'a pas encore été vue, on écrit les intégrales jusqu'à "n"), sommation des relations de comparaisons.

MP*/MPI* Semaine 5 : du 15 au 20 Octobre 2023
Suites et séries numériques - Introduction à la topologie

Tout le programme des semaines S3 (sauf anneaux) et S4 y compris les révisions de première année; la technique d'obtention de développement limité/asymptotique comme les formules des développements limités doivent être connus et mis en oeuvre efficacement

MP*/MPI* Semaine 6 : du 6 au 10 Novembre 2023
Toute l'algèbre linéaire de première année et compléments

V. Espaces vectoriels
Révisions de première année : tout ce qui concerne les espaces vectoriels, les applications linéaires, déterminant et le calcul matriciel
1. Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, rang d'une famille de vecteurs, algèbre Famille (quelconque) libre, génératrice, base
2. Sommes d'un nombre fini de sous-espaces. Sommes directes, sous-espaces supplémentaires, projecteurs.
3. Applications linéaires. Théorèmes du rang. CNS injectivité-surjectivité, théorème fondamental (existence et unicité de l'application linéaire prenant des valeurs données sur une base ou des sous-espaces en somme directe).
4. Liens avec le calcul matriciel. Révisions de première année : matrices équivalentes, matrices semblables, trace, déterminant
Matrices définies par blocs, déterminant d'une matrice triangulaire par blocs
Opérations élémentaires sur les matrices. Applications (pivot de Gauss) au calcul du rang, de l'inverse, à la résolution d'un système.

MP*/MPI* Semaine 7 : du 13 au 17 Novembre 2023
Topologie

Révisions : tout le programme de la semaine S3 (introduction à la topologie)

VI Topologie.
1. Limite en un point (de l'adhérence de l'ensemble de définition). Caractérisation séquentielle de l'existence de cette limite. Opérations sur les fonctions ayant une limite en un point. Cas des fonctions à valeurs dans un espace produit.
Continuité en un point, sur un ensemble. Exemple des fonctions lipschitziennes, polynomiales. Caractérisation de la continuité des applications linéaires et multilinéaire. Normes subordonnées : définitions équivalentes, propriétés.
Caractérisation de la continuité globale à l'aide des ouverts et des fermés.
Extension de la notion de limite à ∞ quand la fonction est à variable ou valeurs réelles.
2. Compacité : Définition séquentielle d'un compact (pas d'autre caractérisation). Propriétés. Fonction continue sur un compact, cas des fonctions numériques. Continuité uniforme, théorème de Heine.
3. Connexité par arcs (Pas d'autre connexité que celle par arcs continus). Composantes connexes (par arcs). Parties étoilées, convexes. Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$, théorèmes des valeurs intermédiaires
4. Cas des espaces vectoriels de dimension finie.

MP*/MPI* Semaine 8 : du 20 au 24 Novembre 2023
Toute l'algèbre linéaire - réduction

Révisions : tout le programme de la semaine S6

VII. Réduction

1. Polynômes d'endomorphismes. Morphismes d'évaluation, image, idéal annulateur et polynôme minimal d'un endomorphisme. Calcul des puissances d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur. Théorème de décomposition des noyaux.
2. Sous-espaces stables, endomorphisme induit, caractérisations matricielles, valeurs propres, vecteurs propres, spectre, sous-espaces propres, somme directe de sous-espaces propres. Spectre et sous-espaces propres d'un endomorphisme induit. Induit d'un polynôme en u sur un sous-esapce stable par u.
Polynôme caractéristique. Les valeurs propres en sont les racines. Ordre de multiplicité d'une valeur propre. Cas d'un endomorphisme induit. Dimension des sous-espaces propres, définition et dimension des sous-espaces caractéristiques dans le cas d'un polynôme caractéristique scindé. Théorème de Cayley-Hamilton (admis).
3. Endomorphismes diagonalisables. Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si E est somme directes des sous-espaces propres de u, si et seulement si le polynôme caractéristique de u est scindé et ses sous-espaces propres sont de dimension l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante, si et seulement si u annule un polynôme simplement scindé.
Endomorphismes trigonalisables, nilpotents (indice de nilpotence). Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable et sa seule valeur propre est zéro. Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé ou si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. Pour un endomorphisme u qui annule un polynôme scindé, il existe $\mathrm{card}(\mathrm{Sp}(u))$ sous-espaces stables par u, de somme directe E et sur lesquels u induit la somme d'une homothétie et d'un nilpotent.

MP*/MPI* Semaine 9 : du 27 Novembre au 1er Décembre 2023
Toute l'algèbre linéaire - réduction

Exactement comme la semaine S8

MP*/MPI* Semaine 10 : du 4 au 8 décembre 2023
Modes de convergences des suites et des séries de fonctions

Révisions : semaines S4-S5-S7 (suites et séries numériques, à valeurs vectorielles, topologie)

VIII. Modes de convergence des suites et des séries de fonctions

1. Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions sur une partie A. Interprétation dans le cas de fonctions bornées. Limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Théorème de la double-limite (admis) = interversion de limites (avec extension au cas où a est adhérent à A, $a = +\infty$ et $a = -\infty$).
La notion de suite de Cauchy **est** totalement hors programme; mais une série absolument convergente dans un espace vectoriel de dimension finie, converge.
2. Approximation des fonctions d'une variable réelle. Fonction en escaliers (sur un segment), continues par morceaux (sur un intervalle). Toute fonction continue par morceaux sur un segment y est limite uniforme de fonctions en escalier. Théorème de Weierstrass polynomial (admis) : toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions polynomiales. Interprétation en termes de densité. Les théorèmes d'approximation ont été admis.
3. Convergence simple, uniforme et normale des séries de fonctions. Définitions. Liens entre ces types de convergence. Continuité de la fonction exp dans une algèbre de dimension finie.
Les énoncés doivent être parfaitement connus sans que ne manque aucune hypothèse, aucun mot dans la définition.
A l'attention des colleurs : uniquement de la CONTINUITE et des LIMITES (les théorèmes d'intégration dérivation etc seront vus plus tard)

MP*/MPI* Semaine 11 : du 11 au 15 décembre 2023
Intégration sur un intervalle - Intégrabilité

Révisions : calculs de primitives de MPSI *(cf feuille primitives dans la rubrique indispensable)* - développements limités

IX. Intégration sur un intervalle

Toute la présentation, conformément au programme, passe par l'étude de fonctions définies par une intégrale.

1. Notion d'intégrale convergente. Structure d'espace vectoriel de l'ensemble des fonctions d'intégrales convergentes, forme linéaire associée (croissance et positivité). Caractérisation de la convergence dans le cas d'une fonction positive. Stricte positivité dans le cas de fonctions continues. Caractère C^1 d'une intégrale fonction de sa borne inférieure (avec pour borne supérieure l'extrémité de l'intervalle)

2. Intégrabilité (ou intégrale absolument convergente). Structure d'espace vectoriel de l'ensemble L^1 des fonctions intégrables sur un intervalle, inclusion dans l'ensemble des fonctions d'intégrale convergentes. Fonctions de référence : fonctions de Riemann ($t \mapsto t^\alpha$ sur $[1; +\infty[$ et $t \mapsto |t-a|^\alpha$ sur $[b; a[$ avec b fini) et exponentielle $t \mapsto \exp(-\lambda t)$ sur $\mathbb{R}_+$ avec λ réel. Intégration des relations de comparaisons.

3. Mêmes propriétés dans le cas général. La convergence sur un intervalle ouvert I est définie à partir de la convergence sur deux intervalles semi-ouverts de réunion I et d'intersection un point.
Effet d'un changement de variables C^1 , bijectif, strictement monotone. Intégrations par parties.

MP*/MPI* Semaine 12 : du 18 au 22 décembre 2023
Réduction - Endomorphismes d'un espace euclidien

Révisions : espaces vectoriels (S6), réduction (S8), espaces préhilbertiens réels (1ère année)

X. Espaces préhilbertiens réels

1. Définition d'un produit scalaire, norme associée. Inégalité de Cauchy-Schwarz et de Minkowski, cas d'égalité. Quelques espaces préhilbertiens réels usuels.
Formule de polarisation. Théorème de Pythagore. Vecteurs unitaires, orthogonaux, sous espaces vectoriels orthogonaux. Orthogonal d'une partie, supplémentaire orthogonal (en dimension finie, existence de ce dernier).

2. Cas des espaces euclidiens. Théorème de représentation des forme linéaires (théorème de Riesz). Existence de bases orthonormales, procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Dans une base orthonormale, expressions de la norme, produit scalaire. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, caractérisation, distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie.

XI. Endomorphismes d'un espace euclidien

1. Adjoint d'un endomorphisme. Définition, propriétés (linéarité et involution du passage à l'adjoint), stabilité par u^* de l'orthogonal d'un sous-espace stable par u. Liens avec les matrices.
Définition des endomorphismes auto-adjoints. Théorème spectral. Endomorphismes autoadjoints positifs et définis-positifs, caractérisation spectrale.

2. Matrices orthogonales. Définition, caractérisations. Interprétation comme matrice de passage. Déterminant d'une telle matrice. Groupe orthogonal et spécial orthogonal. Matrices orthogonales directes et indirectes. Morphisme surjectif de groupes de $[\mathbb{R}; +]$ dans $SO(2)$ et du groupe des complexes de module 1 dans $SO(2)$. Application à l'orientation d'un espace euclidien et théorème spectral sous forme matricielle.

3. Isométries vectorielles (Le vocabulaire d'automorphisme orthogonal n'est plus utilisé, en raison des confusions qu'il pouvait suggérer). Définition, caractérisations. Notion d'isométries directes et indirectes. Groupe orthogonal. Classification des isométries du plan euclidien. Réduction des isométries. Cas de $SO(3)$.

MP*/MPI* Semaine 13 : du 8 au 12 Janvier 2024
Réduction - Endomorphismes d'un espace euclidien

Même programme que la semaine S12

MP*/MPI* Semaine 14 : du 15 au 19 Janvier 2024
Espaces probabilisés - Variables aléatoires

Révisions (de première anne): familles sommables, probabilités et variables aléatoires sur un univers fini.

XII. Probabilités
1. Univers, tribu sur un ensemble (définition et propriétés de stabilité qui en découlent). Systèmes complets d'événements (toujours au plus dénombrable).
Probabilité sur un ensemble probabilisable, cas d'un univers au plus dénombrable. Événements négligeables (et réunion au plus dénombrable de tels événements), quasi-certains (et intersection au plus dénombrable de tels événements). Système quasi-complet d'événements. Continuité croissante, décroissante et inégalité de Boole.
2. Probabilités conditionnelles. Définition, formule des probabilités composées, des probabilités totales et formule de Bayes.
3. Couple d'événements indépendants. Indépendance mutuelle.
XIII. Variables aléatoires discrètes.
1. Variable aléatoire discrète. Événements associés et loi suivie. Image d'une variable aléatoire par une fonction.
2. Espérance d'une variable aléatoire réelle discrète (cas d'une variable positive). Structure d'espace vectoriel des variables aléatoires réelles discrètes d'espérance finie (L_1), linéarité et croissance de l'espérance. Variable aléatoire centrée.
Inégalité de Markov. Formule de transfert.
3. Espace vectoriel L_2 des variables aléatoires réelles discrètes de carré d'espérance finie; inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité. Variance,écart-type, variable aléatoires centrées réduites. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Les couples de variables aléatoires, les lois usuelles et les fonctions génératrices feront l'objet d'un cours ultérieur.

MP*/MPI* Semaine 15 : du 22 au 26 Janvier 2024
Suites et séries de fonctions

Révisions : développements limités, calculs de primitives, intégrabilité sur un intervalle (cf S11), séries numériques (cf S4), modes de convergence des suites et séries de fonctions (cf S10)

XIV. Suites et séries de fonctions

1. Interversion de limites i.e. théorème de la double limite (admis), extension au cas des séries. Continuité d'une limite uniforme de fonctions continues.

2. Intégration et primitivation : cas d'une limite de suite, intégration terme à terme sur un segment.

3. Dérivation de la limite d'une suite de fonctions, dérivation terme à terme d'une somme d'une série de fonctions. Extension au cas des fonctions de classe C^k (On suppose la convergence simple des $k-1$ premières dérivées, et la convergence uniforme de la dérivée k-ième sur tout segment inclus dans l'intervalle). Application au cas de l'exponentielle $t \mapsto \exp(tA)$.

4. Théorème de convergence dominée (admis) : si les fonctions f_n sont continues par morceaux sur l'intervalle I, si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f, continue par morceaux sur I, et s'il existe g, continue par morceaux sur I, intégrable sur I avec $|f_n| \leqslant g$ pour tout n (hypothèse de domination) alors f est intégrable sur I et la suite des intégrales des f_n sur I converge et vers $\int_I f$.

Intégration terme à terme des séries de fonctions sur un intervalle (admis) pour les fonctions positives et le cas général :

si les fonctions f_n sont continues par morceaux sur l'intervalle I à valeurs positives, si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I, avec une somme continue par morceaux sur I, alors la série $\sum \int_I f_n$ converge si et seulement si la somme de $\sum f_n$ est intégrable sur I. Son intégrale est la somme de la série $\sum \int_I f_n$ (éventuellement $+\infty = +\infty$).

Si les fonctions f_n sont continues par morceaux sur l'intervalle I, si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I, avec une somme continue par morceaux sur I, et si la série $\sum \int_I |f_n|$ converge, alors la série $\sum \int_I f_n$ converge, la somme de $\sum f_n$ est intégrable sur I et son intégrale est la somme de la série $\sum \int_I f_n$.

MP*/MPI* Semaine 16 : du 29 janvier au 2 février 2024
Fonctions d'une variable réelle - intégrales à paramètres

Révisions : toute l'analyse de première (fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes), calcul de primitives, intégration sur un intervalle (S10), méthodes de résolution d'équations différentielles (première année)

Fonctions d'une variable réelle.
Toutes les fonctions sont à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie.
1. Continuité, limites.
2. Dérivabilité. Dérivée en un point. Structure de l'ensemble des fonctions dérivables. Opérations sur les fonctions dérivables sur un intervalle (y compris composition par une application multiplinéaire). Propriétés (théorème de Rolle, égalité des accroissements finis, etc).
3. Régularité. Dérivées d'ordre supérieur, structure, composition.
4. Intégration d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle. Définition, propriétés, inégalités des accroissements finis, formules de Taylor.

Intégrales à paramètres
1. Théorème de continuité sous le signe somme : si $f : A \times I \to \mathbb{K}$ (I intervalle de $\mathbb{R}$, A partie de E, espace vectoriel de dimension finie, $\mathbb{K} = R$ ou $\mathbb{C}$) vérifie les hypothèses $f(.,t)$ est continue sur A pour tout t de I, $f(x,.)$ est continue par morceaux sur I pour tout x de A et s'il existe une fonction g continue par morceaux et intégrable sur I avec $|f(x,t)| \leqslant g(t)$ pour tout (x,t) de $A \times I$ (ou une domination locale sur tout segment) alors h, définie par $h(x) = \int_I f(x,.)$ est continue sur A.
Théorème similaire sur les familles $f_\lambda)_{\lambda \in J}$ de fonctions avec $f_\lambda(t)$ tendant vers $f(t)$ quand λ tend vers $\tilde{\lambda}$ pour tout t de I.
2. Théorème de dérivation sous le signe somme (A est un intervalle ici) : $f : A \times I \to \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ avec $f(\cdot,t)$ de classe C^k sur A, pour tout ℓ de $[\![0;k-1]\!]$, $\frac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(x,.)$ continue par morceaux, intégrable sur I pour tout x de A, et $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,.)$ vérifie les hypothèses du théorème de continuité sous le signe somme alors h, définie par $h(x) = \int_I f(x,.)$ est C^k sur A, et dérivable sous jusqu'à k fois sous le signe intégrale.
L'exemple de la fonction Γ d'Euler a été traité dans le cours, mais cet exemple n'est pas à connaître comme cours.

MP*/MPI* Semaine 17 : du 4 au 8 Février 2024
Séries entières

1. Définition des séries entières. Rayon de convergence (définition via les suites bornées). Lemme d'Abel. Convergence d'une série entière, convergence normale sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence. Opérations (produit de Cauchy et combinaison linéaire) de séries entières, avec estimation des rayons de convergence.
2. Somme des séries entières d'une variable réelle. Intégration, dérivation terme à terme. Théorème d'Abel radial. Séries de Taylor.
3. Fonctions développables en série entière. Définition, séries classiques (exp, cos, sin, ch, sh, $(1+t)^\alpha$, $\ln(1+t)$, arctan). Méthodes (reconnaître, dériver, équations différentielles...) sur des exemples. Les séries du type $\sum P(n)t^n$ et $\sum P(n)t^n/n!$ avec P un polynôme.
4. Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Définition, lien avec la loi, exemples usuels (Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson). Liens avec l'espérance et la variance. Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes.

MP*/MPI* Semaine 18 : 11 du 15 Février 2024
Toutes les probabilités

Révisions : familles sommables (première année), probabilités (S14), fonctions génératrices (S17)

XVIII. Couples et n-uplets de variables aléatoires
1. Lois d'un couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles, extension aux vecteurs aléatoires.
Suites de variables indépendantes.
Espérance d'un produit. Covariance. Variance et somme.
2. Lois usuelles.
Loi de Bernoulli (définition, espérance, variance, fonction génératrice). Lois binomiales (définition, espérance, variance, fonction génératrice, lien avec une loi de Bernoulli).
Lois géométriques (définition, espérance, variance, fonction génératrice, lien avec une loi de Bernoulli, caractérisation comme processus sans mémoire).
Lois de Poisson (définition, espérance, variance, fonction génératrice, approximation d'une loi binomiale).
3. Loi faible des grands nombres.

MP*/MPI* Semaine 19 : du 4 au 8 Mars 2024
Toute l'analyse

Révisions :
- suites et séries numériques (S4),
- topologie (S3-S7)
- modes de convergences des suites et séries de fonctions (S10),
- intégrabilité (S11)
- suites et séries de fonctions (S15),
- séries entières (S17)
- fonctions vectorielles d'une variable réelle (S16)
- intégrales à paramètres (S16)

Pas de calcul différentiel, ni équation différentielle (spé) cette semaine.

MP*/MPI* Semaine 20 : du 11 au 15 Mars 2024
Fonctions de plusieurs variables

XVII. Fonctions de plusieurs variables
On ne s'intéresse qu'à des applications d'un ouvert d'un **espace vectoriel normé de dimension finie** à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.
1. Définition et unicité de la différentielle. Dérivée selon un vecteur. Dérivées partielles, expression de la différentielle à l'aide des dérivées partielles. Cas de la restriction d'une application linéaire.
2. Combinaison liénaire d'applications différentiables. Composée d'applications différentiables, composition de telles applications via une application multilinéaire. Matrice jacobienne. Dérivées partielles d'une composée (Les étudiants doivent être capables de retrouver ces dérivées partielles rapidement si besoin à l'aide au choix de chacun de la différentielle d'une composée , de la matrice jacobienne ou la règle de la chaîne). Lien dérivabilité et différentiabilité. Dérivée le long d'un arc.
3. Définition d'une fonction de classe C^1 sur un ouvert. Caractérisation via les dérivées partielles (admis). Pour une fonction C^1 cns pour que $df = 0$. Fonctions de classe C^2 puis C^k : définition via les dérivées partielles. Théorème de Schwarz et généralisation (théorèmes admis). Équations aux dérivées partielles (sauf changement de variables affine ou en coordonnées polaires, le changement de variable sera fourni). **La notion de difféomorphisme est hors programme.**

XVIII. Fonctions de plusieurs variables : optimisation
1. Définition du gradient, expression en base orthonormée, interprétation géométrique.
2. Vecteurs tangents à une partie. Définition, exemple des sous-espaces affines, des sphères des espaces euclidiens, cas d'un graphe d'une fonction sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, de surfaces de niveau (admis), lien avec le gradient.
3. Notion de point critique d'une fonction numérique. Hessienne d'une telle fonction en un point, formule de Taylor à l'ordre 2. Conditions induites aux points (intérieurs) où f admet un extrêmum local sur la différentielle et la hessienne, cas de la restriction à une surface de niveau (une seule contrainte numérique). Conditions suffisantes d'existence d'extrémum local en un point intérieur (point critique et hessienne définie positive (minimum) ou d'opposé définie positive (maximum)).

MP* Semaine 21 : du 18 au 22 Mars 2024
Fonctions de plusieurs variables - Équations différentielles

Révisions : fonctions plusieurs variables (S20)

XIX. Équations différentielles linéaires
1. Équations différentielles linéaires d'ordre 1.
Définition, second membre, équation homogène, notion de coefficients constants, conditions de Cauchy, théorème de Cauchy-Lipchitz linéaire (admis). Traduction par un système différentiel matriciel. Structure de l'espace des solutions (et avec dimension), principe de superposition.
2. Systèmes différentiels à coefficients constants.
Méthodes de résolution (diagonalisation, trigonalisation), utilisation de l'exponentielle.

XX. Équations différentielles scalaires
1. Définition, notion d'équation régulière ou normalisée, système du premier ordre associé et relations entre les solutions des deux problèmes, structure de l'ensemble des solutions.
Cas des équations linéaires d'ordre 1 : forme des solutions, raccord.
Cas des équations linéaires d'ordre 2. Utilisation de séries entières, méthode de variation de la constante (pour trouver une deuxième solution de l'équation homogène), raccord; wronskien; méthode de variations des constantes (uniquement dans le cas des équations d'ordre 2). Cas des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants avec un seconde membre du type $P(t)e^{\lambda t}$ avec P un polynôme et λ un complexe.

MP* Semaine 22 : du 25 au 29 Mars 2024
Toute l'algèbre linéaire et euclidienne

Révisions : - polynômes (S2),
- algèbre linéaire de première année (S6)
- réduction (S8),
- espaces préhilsbertiens réels et endomorphismes d'un espace euclidien (S12)

Ceci constitue le dernier programme de colle de l'année.
Merci à tous les colleurs pour leur participation et bon courage aux étudiants pour les dernières révisions avant les épreuves écrites.