ENS Lyon. Option PC. 2016

I. Conversion de puissance d'un aérogénérateur. Limite de Betz

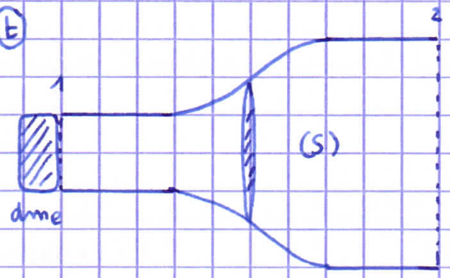
1. Ecoulement incompressible $\Rightarrow$ conservation du débit volumique le long du tube de courant
$\Rightarrow v_1 S_1 = v_2 S_2$

L'éolienne prélève de l'énergie cinétique à l'air $\Rightarrow v_2 < v_1$

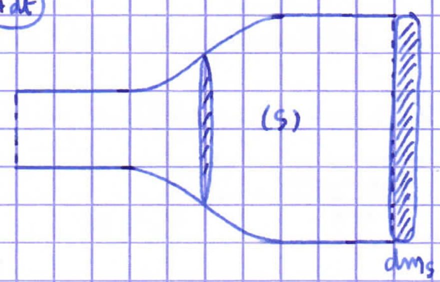
D'où : $S_1 < S_2$ Le tube de courant a une forme évasée d'amont en aval.

2. $\boxed{q_m = \rho v_1 S_1 = \rho v S = \rho v_2 S_2}$

3. a) (t)



(t+dt)



système ouvert (S) : l'air entre 1 et 2
système fermé $(S^*) = (S)_t + dm_e = (S)_{t+dt} + dm_s$ $\quad (dm_s = dm_e = q_m dt)$

Loi de la quantité de mouvement à (S^*) : $\dfrac{d\vec{P}_{(S^*)}}{dt} = \vec{F}_{ext\to(S^*)}$

$$\frac{d\vec{P}_{(S^*)}}{dt} = \frac{\vec{P}_{(S)}(t+dt) + \vec{P}_{dm_s} - \vec{P}_{(S)}(t) - \vec{P}_{dm_e}}{dt} \qquad (\vec{P}_{(S)}(t+dt) = \vec{P}_{(S)}(t) \text{ en régime stationnaire})$$

$$= \frac{dm_s \vec{v}_2 - dm_e \vec{v}_1}{dt} = q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\vec{F}_{ext\to(S^*)} = \vec{F}_{rotor\to air} + \underbrace{\vec{F}_{pression\to(S^*)}}_{=\vec{0} \text{ car } P_0 \text{ agit uniformément sur toute la surface de } (S^*)} + \text{ poids de } (S^*) \text{ (négligeable)}$$

donc : $\boxed{\vec{F}_{rotor\to air} = q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}$

b) Entre (1) et (E) : $P_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_E + \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow \boxed{P_E = P_0 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v^2)}$

Entre (2) et (S) : $P_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = P_S + \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow \boxed{P_S = P_0 + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v^2)}$

c) $\vec{F}_{air\to rotor} = P_E S \vec{e}_x - P_S S \vec{e}_x = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) S \vec{e}_x$

donc : $\boxed{\vec{F}_{rotor\to air} = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) S \vec{e}_x}$

d) $q_m(v_2 - v_1)\vec{e}_x = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) S \vec{e}_x \Rightarrow \rho v S (v_2 - v_1) = \frac{1}{2}\rho S (v_2 - v_1)(v_1 + v_2)$

$\Rightarrow \boxed{v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)}$

4. a) Loi de l'énergie cinétique à (S^*) : $\dfrac{dE_{c(S^*)}}{dt} = \mathcal{P}_{ext\to(S^*)} + \mathcal{P}_{int\, à\, (S^*)}$

• $\frac{dE_{c(S^*)}}{dt} = \frac{E_{c(S)}(t+dt) + E_{c\,dm_s} - E_{c(S)}(t) - E_{c\,dm_e}}{dt} = \frac{E_{c\,dm_s} - E_{c\,dm_e}}{dt}$

$= \frac{\frac{1}{2} dm_s v_2^2 - \frac{1}{2} dm_e v_1^2}{dt} = \frac{1}{2} q_m (v_2^2 - v_1^2)$

• $\mathcal{P}_{int\,\grave{a}\,(S^*)} = 0$ car écoulement parfait et incompressible

• $\mathcal{P}_{ext \to (S^*)} = \mathcal{P}_{rotor \to air} + \underbrace{\mathcal{P}_{pression \to (S^*)}}_{=0}$ car le volume de (S^*) ne varie pas puisque l'écoulement est incompressible

d'où : $\mathcal{P}_{rotor \to air} = \frac{1}{2} q_m (v_2^2 - v_1^2)$ puis : $\boxed{\mathcal{P}_{air \to rotor} = \frac{1}{2} q_m (v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2} \rho S v_1 (v_1^2 - v_2^2)}$

b) $\mathcal{P}^* = \frac{1}{2} \underbrace{(\rho S v_1)} v_1^2$

débit massique du vent incident de vitesse v_1 à travers la section S du rotor

donc $\mathcal{P}^*$ = puissance cinétique incidente

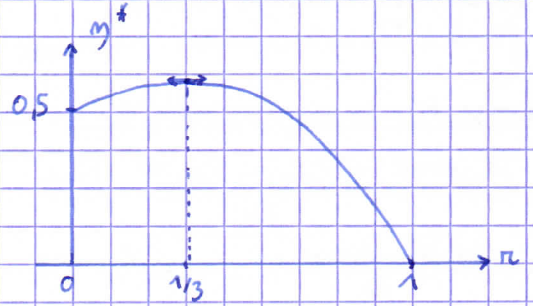
c) $\eta^* = \frac{\mathcal{P}_{air \to rotor}}{\mathcal{P}^*} = \frac{\frac{1}{2} \rho S v (v_1^2 - v_2^2)}{\frac{1}{2} \rho S v_1^3} = \frac{(v_1 + v_2)}{2 v_1} \frac{(v_1^2 - v_2^2)}{v_1^2} = \frac{1}{2}(1+r)\underbrace{(1-r^2)}_{=(1+r)(1-r)}$

donc : $\boxed{\eta^* = \frac{1}{2}(1+r)^2(1-r)}$

d/e) $\frac{d\eta^*}{dr} = 0$ pour $r = \frac{1}{3}$

on a alors : $\eta^*_{max} = \frac{16}{27} \simeq 0{,}6$

C'est la limite de Betz



5-a) La figure 1 montre que le champ de vitesse a une composante radiale non négligeable au voisinage du rotor.

b) On ne peut pas appliquer le théorème de Bernoulli entre (E) et (S) car le rotor coupe les lignes de courants. De plus, dans cette région, l'écoulement n'est pas rigoureusement stationnaire. Il est aussi certainement turbulent.

c) v_1 étant fixée, c'est la valeur de v_2 qui détermine r.
La valeur de v_2 va dépendre de la taille des pales du rotor, de leur forme, de leur nombre.

• ENS Lyon. Option PC. 2016 •

II Aérodynamique d'une pale d'éolienne

6. a) $R_e = \frac{\rho V L}{\eta}$ avec : $V \sim 10\ m\,s^{-1}$; $L = e \sim 0{,}1\,m$; $\rho \sim 1\ kg\,m^{-3}$; $\eta \sim 10^{-5}\ Pa.s$

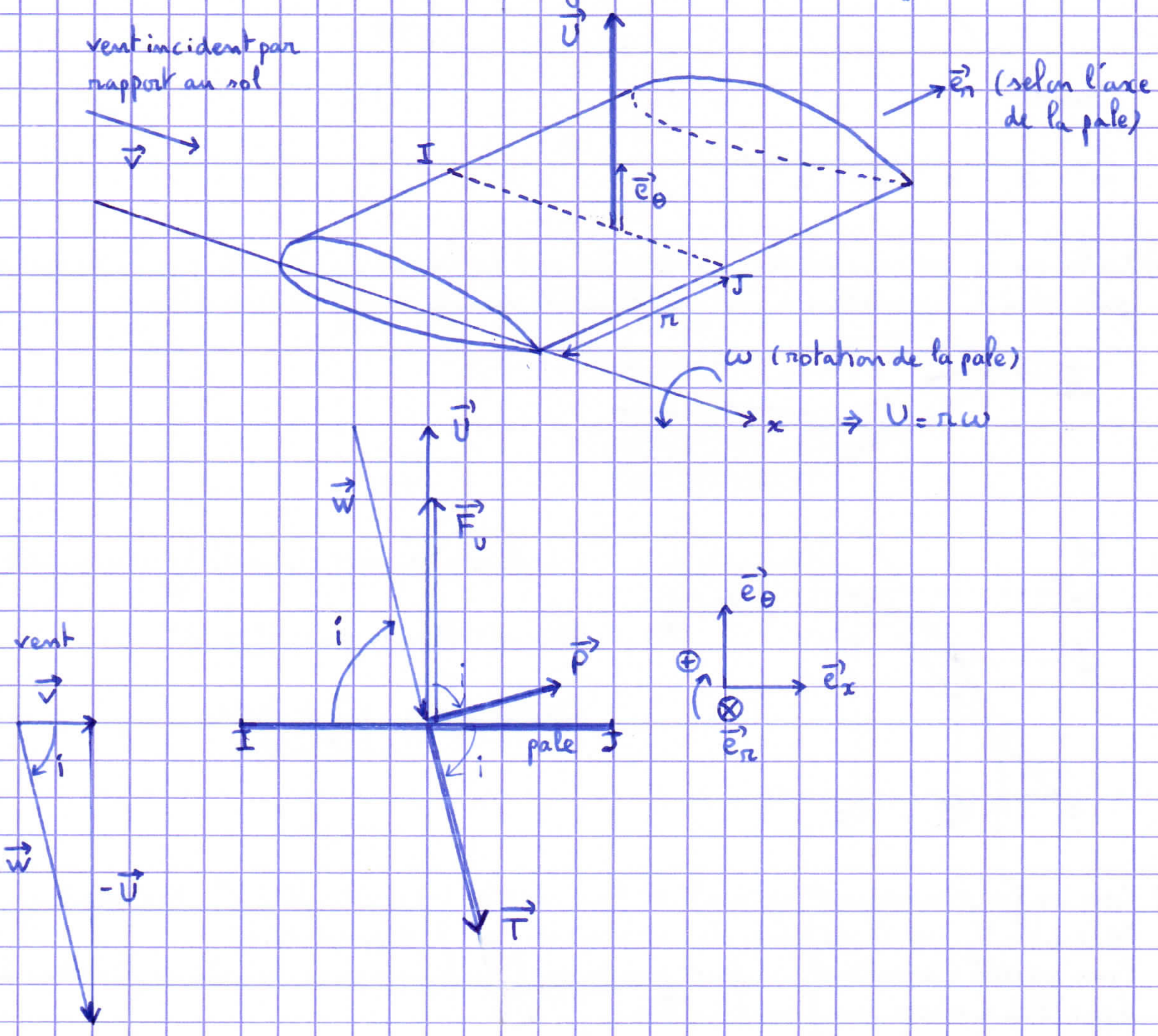
donc : $R_e \sim 10^5$. L'écoulement est turbulent.

b) $\boxed{\|\vec{F}_{traînée}\| = C_x \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 \cdot S}$ S : section droite de l'objet ($= \pi r^2$ pour une sphère)

L'analyse dimensionnelle permet de justifier cette expression.
C_x est un facteur numérique sans dimension. $C_x \sim 1$

7. C_p et C_T sans dimension. Ils dépendent de l'angle d'incidence i et de la forme de la pale.

8 et 9.



Loi de composition des vitesses : $\vec{V}_{vent/sol} = \vec{V}_{vent/pale} + \vec{V}_{pale/sol}$ $\Rightarrow \vec{V} = \vec{W} + \vec{U}$
$\Rightarrow \vec{W} = \vec{V} - \vec{U}$

10. La force $\vec{F}_U$ qui participe à l'entraînement de la pale est constituée par les composantes selon $\vec{U}$ de la traînée et de la portance :

$$\vec{F}_U = (\vec{P}\cdot\vec{e}_\theta + \vec{T}\cdot\vec{e}_\theta)\,\vec{e}_\theta$$

$$= (P\cos i - T\sin i)\,\vec{e}_\theta$$

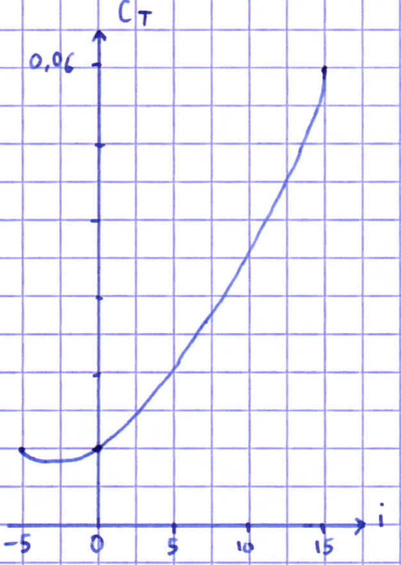
donc : $F_U = \frac{1}{2}C_P\,\rho A W^2 \cos i - \frac{1}{2}C_T\,\rho A W^2 \sin i$

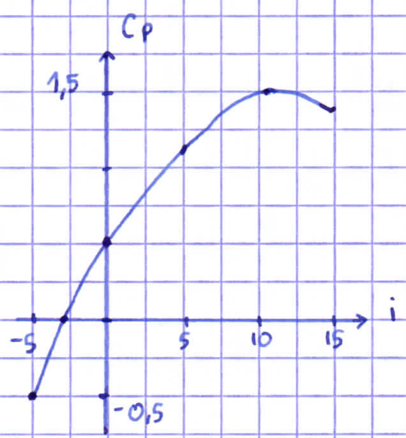
d'après le schéma de composition des vitesses : $\sin i = \frac{U}{W}$ et $\cos i = \frac{V}{W}$

donc : $F_U = \frac{1}{2}\rho A W (C_P V - C_T U)$

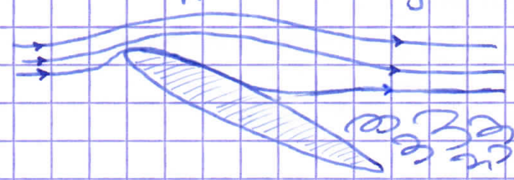
La force surfacique est : $\boxed{f_U = \frac{F_U}{A} = \frac{1}{2}\rho W (C_P V - C_T U)}$

11. a)

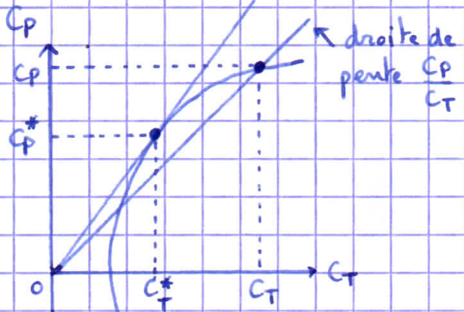




b) La baisse de portance est due au décollement de la couche limite sur le dessus de la pale et à l'apparition d'une zone tourbillonnaire sous forme de sillage.



c)



On cherche la droite de pente $\frac{C_P}{C_T}$ maximale.

Elle est obtenue pour $i^* \simeq 2°$

On lit alors : $C_T^* \simeq 0{,}011$
$C_P^* \simeq 0{,}8$

d) Pour un fonctionnement optimal, il faut avoir i = constante = i^* tout au long de la pale.
Or $\sin i = \frac{U}{W} \Rightarrow i$ dépend de $U = r\omega \Rightarrow i$ dépend de r.
Pour garder i constant, il faut modifier l'inclinaison de la pale en fonction de r, donc lui donner une forme vrillée.

12. $\mathcal{P} = \mathcal{M}.\omega$ avec $\mathcal{M}$ = couple = $\int_0^{90} \frac{d\mathcal{M}}{dr}\,dr$ = aire sous la courbe

On compte environ 40 carreaux sous la courbe $\Rightarrow$ aire $= 40 \times 10 \times 20.10^3 = 8.10^6$ N.m
On calcule : $\omega = 9 \cdot \frac{2\pi}{60} = 0{,}94$ rad s^{-1}

donc : $\mathcal{P} \simeq 7{,}5$ MW

13. La puissance cinétique incidente est : $\mathcal{P}^* = \frac{1}{2}\rho(\pi R^2)V_1^3$ avec $R = 90$ m et $V_1 = 13$ m s^{-1}
$= 3{,}4.10^7$ W

D'où : $\eta_{conv} = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}^*} \simeq 22\%$ C'est bien inférieur à la limite de Betz.