

I. Modélisation de la réponse élastique d'un solide

I.A. Considérations préliminaires

1. Equilibre du cube:  $\vec{0}' = m\vec{g}' + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \text{face sup}} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \text{face inf}}$   
 $\vec{0}' = -\rho a^3 g \vec{u}_z' + \sigma_z a^2 \vec{u}_z' + (-\sigma_z' a^2)$   
 ↑ action réciproque  
 donc:  $\sigma_z' = (\sigma_z - \rho g a) \vec{u}_z'$

2. Le poids est négligeable si:  $\rho g a \ll \sigma_z$   
 3. Une force agissant sur un volume est une force à distance.

I.B. Etat de contrainte uniaxial

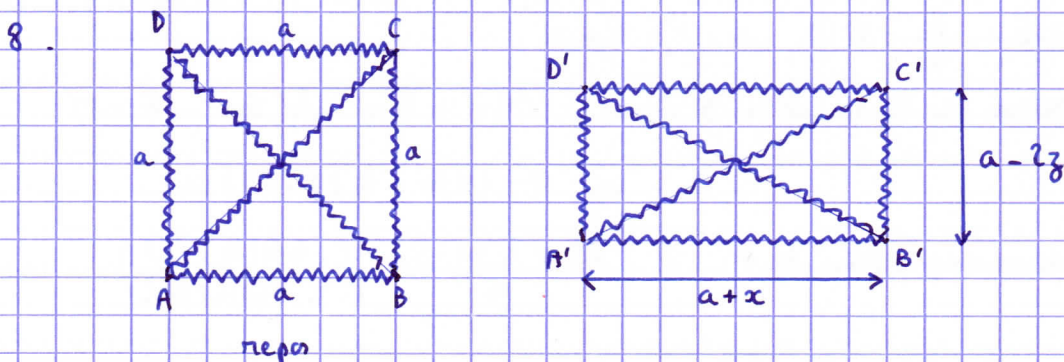
4. L'hypothèse est:  $\Delta L_m \ll L_m$   
 5.  $E \sim 10^{11}$  Pa pour l'acier

justification:  $c_{\text{son dans un solide}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \rightarrow E = \rho c_{\text{son}}^2 \sim 10^4 \cdot (3 \cdot 10^3)^2 \sim 10^{11}$  Pa

6. Symétrie de révolution autour de  $Oz$   $\Rightarrow Ox$  et  $Oy$  sont équivalents  
 $\Rightarrow \nu_x = \nu_y$

7. Travail élémentaire de  $\vec{F}$ :  $\delta W = F dx = -d(-Fx)$   
 $\Rightarrow$  énergie potentielle  $-Fx$  associée à la force  $\vec{F}$

L'énergie potentielle totale:  $\Psi = E_p - Fx$  est minimale à l'équilibre stable



$$E_p = 2 \times \frac{1}{2} k x^2 + 2 \times \frac{1}{2} k (2z)^2 + 2 \times \frac{1}{2} k' (l - a\sqrt{2})^2$$

avec:  $l = [(a+x)^2 + (a-z)^2]^{1/2}$   
 $= [a^2 + 2ax + x^2 + a^2 - 4az + 4z^2]^{1/2}$   
 $= [2a^2 + 2ax - 4az + x^2 + 4z^2]^{1/2}$

$$l = a\sqrt{2} \left[ 1 + \frac{x}{a} - \frac{2z}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{2z^2}{a^2} \right]^{1/2}$$

$$\text{donc: } l \approx a\sqrt{2} \left( 1 + \frac{x}{2a} - \frac{z}{a} \right)$$

$$\text{puis: } E_p = kx^2 + 4kz^2 + k' \left( \frac{2x}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}z \right)^2$$

$$\text{Finalement: } \Psi = kx^2 + 4kz^2 + k' \left( \frac{x^2}{2} + 2z^2 - 2xz \right) - Fx$$

$$9. \text{ A l'équilibre: } \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2kx + k'x - 2k'z - F = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \Rightarrow 4kz + 2k'z - k'x = 0$$

10. NB: L'énoncé me semble mal posé car il y a une inversion des rôles de  $Ox$  et  $Oz$  entre les figures 1 et 2

Contrainte  $\frac{F}{a^2}$  selon  $Ox \Rightarrow$  élongation  $\Delta L_x = x$  selon  $Ox$

contraction  $\Delta L_z = -2z$  selon  $Oz$

Par définition du coefficient de Poisson:  $-2z = -\nu x \Rightarrow 2z = \nu x$

On reporte dans la 2<sup>e</sup> relation de la question 9:  $2k\nu x + k'\nu x - k'x = 0$

$$(2k + k')\nu = k'$$

$$\text{donc: } \nu = \frac{k'}{2k + k'}$$

Cas particuliers: •  $k = k'$ :  $\nu = \frac{1}{3}$

•  $k \gg k'$ :  $\nu \approx \frac{k'}{2k} \ll 1$  il n'y a quasiment pas de contraction latérale

•  $k \ll k'$ :  $\nu = 1$  l'allongement est identique à la contraction

11. Par définition de  $E$ :  $\frac{F}{a^2} = E \frac{x}{a} \Rightarrow F = Eax$

La première relation de la question 9 donne:  $2kx + k'x - k'\nu x - F = 0$

$$\Rightarrow F = (2k + k'(1 - \nu))x$$

$$\text{En égalant les deux expressions de } F: \quad E = \frac{2k + k'(1 - \nu)}{a} \quad \left( = \frac{4k(k + k')}{a(2k + k')} \right)$$

Cas particuliers: •  $k = k'$ :  $E = \frac{8k}{3a}$

•  $k \gg k'$ :  $E = \frac{2k}{a}$

•  $k \ll k'$ :  $E = \frac{4k}{a}$

$E$  paramètre intensif  $\Rightarrow E$  indépendant de  $a \Rightarrow k$  et  $k'$  proportionnels à  $a$

I-C Etat de contrainte plan

12. On a:  $\sigma_z = E \epsilon_z \Rightarrow \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$

puis:  $\epsilon_x = \frac{\Delta L_x}{a} = -\frac{\nu \Delta L_z}{a} = -\nu \epsilon_z \Rightarrow \epsilon_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_z$

$\sigma_x$  et  $\sigma_y$  sont équivalents, donc:  $\epsilon_x = \epsilon_y$

13. On inverse les rôles de  $\sigma_x$  et  $\sigma_z$ :  $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_x$

14. Par principe de superposition dans un milieu linéaire:

$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_z \quad \epsilon_y = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) \quad \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_x$

15. Si  $\sigma_z = -\sigma_x = \sigma$ :

$\epsilon_x = -\frac{(\nu+1)\sigma}{E}$
$\epsilon_y = 0$
$\epsilon_z = \frac{(\nu+1)\sigma}{E}$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(a+\Delta L_x)(a+\Delta L_y)(a+\Delta L_z) - a^3}{a^3}$$

$$= \frac{a^3(1+\epsilon_x)(1+\epsilon_y)(1+\epsilon_z) - a^3}{a^3}$$

$$= (1+\epsilon_x)(1+\epsilon_z) - 1$$

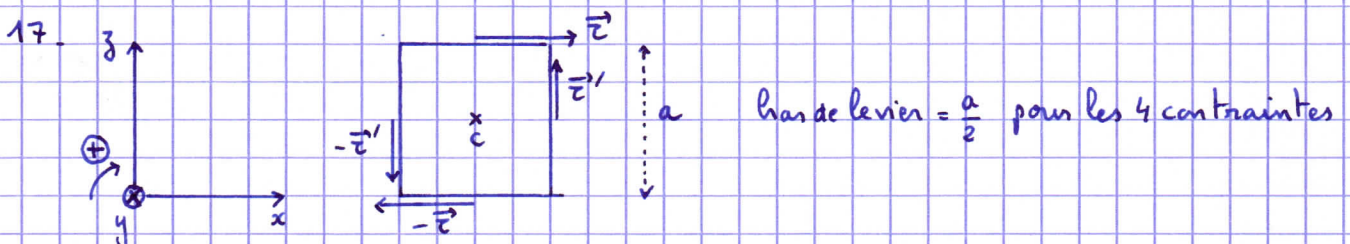
$$\approx 1 + \epsilon_x + \epsilon_z - 1 \quad (\text{à l'ordre 1})$$

donc:  $\frac{\Delta V}{V} = 0$

I-D Etat de cisaillement simple

16. La loi  $\tau = \gamma G$  est vérifiée sauf pour  $\gamma < 10\%$

La pente est:  $G \approx \frac{12 \cdot 10^6 - 0,2 \cdot 10^6}{1,5 - 0,1}$  soit:  $G = 7 \cdot 10^5 \text{ Pa}$



Loi scalaire du moment cinétique par rapport à l'axe  $C_z$ , à l'équilibre:

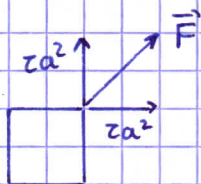
$\tau \cdot \frac{a}{2} \times 2 - \tau' \cdot \frac{a}{2} \times 2 = 0 \Rightarrow \tau = \tau'$

Si  $a \rightarrow 0$ , le volume tend vers 0, donc le couple volumique tend vers 0 ainsi que le moment d'inertie du cube par rapport à l'axe  $Cy$   
 $\Rightarrow$  la loi du moment cinétique est inchangée  
 $\Rightarrow \tau = \tau'$

18 - A l'équilibre:  $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \Rightarrow 4k'x - \sqrt{2}F = 0$   
 $\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \Rightarrow 4k'z + 4k'z - \sqrt{2}F = 0$

D'après la figure 6:  $\tan \frac{\delta}{2} = \frac{x}{a+z} \Rightarrow \frac{\delta}{2} \approx \frac{x}{a} \Rightarrow \delta \approx \frac{2x}{a}$

On a aussi:



$$F = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} za^2 = \sqrt{2} za^2$$

En utilisant la première relation à l'équilibre:  $4k' \cdot \frac{a\delta}{2} - \sqrt{2}(\sqrt{2}za^2) = 0$

$$2k'a\delta - 2za^2 = 0$$

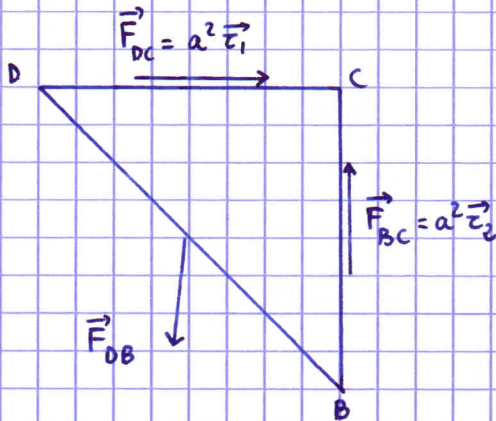
$$k'\delta - za = 0$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{k'}{a} \delta$$

On en déduit:  $G = \frac{k'}{a}$

I. E Lien entre les modules de Young et de cisaillement

19



Equilibre du domaine DCB :  $\vec{F}_{DC} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{DB} = \vec{0}$

$$\Rightarrow a^2 z \vec{u}_x + a^2 z \vec{u}_y + \vec{F}_{DB} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{DB} = -a^2 z (\vec{u}_x + \vec{u}_y) = -a^2 z \sqrt{2} \vec{u}_x$$

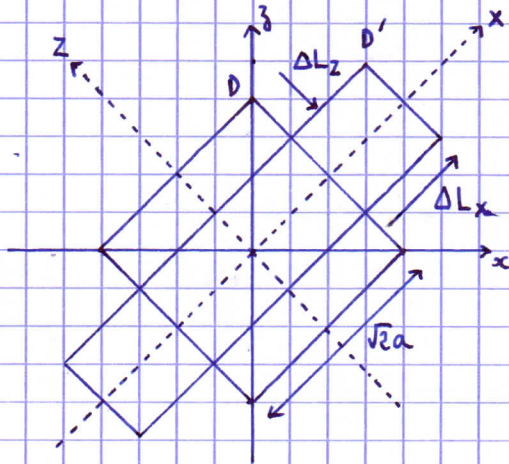
Par définition :  $\vec{\sigma}_1 = \frac{\vec{F}_{DB}}{S}$  avec :  $S = a \cdot DB = \sqrt{2} a^2$

$$= \frac{a^2 z \sqrt{2} \vec{u}_x}{\sqrt{2} a^2} \vec{u}_x$$

donc :  $\vec{\sigma}_1 = \tau \vec{u}_x$     On a :  $\sigma = \tau$

20. De la même façon :  $\vec{\sigma}_2 = -\tau \vec{u}_z$

21



En utilisant la question 15, on a :

$$\Delta L_x = a\sqrt{2} \epsilon_x = a\sqrt{2} \frac{\sigma}{E} (1+\nu)$$

$$\Delta L_z = a\sqrt{2} \epsilon_z = -a\sqrt{2} \frac{\sigma}{E} (1+\nu)$$

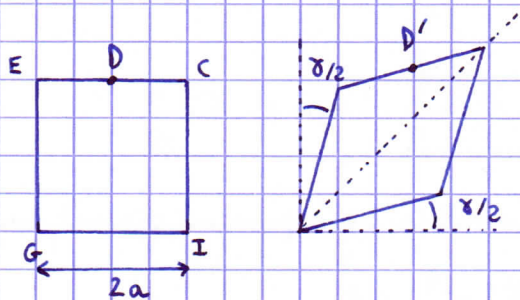
Donc :  $\vec{DD}' = \Delta L_x \vec{u}_x + \Delta L_z \vec{u}_z$

$$= a\sqrt{2} \frac{\sigma}{E} (1+\nu) (\vec{u}_x - \vec{u}_z)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \vec{u}_x$$

$$\vec{DD}' = 2a \frac{\sigma}{E} (1+\nu) \vec{u}_x$$

22



En supposant l'angle  $\frac{\delta}{2}$  petit, on a :

$$\frac{\delta}{2} \approx \frac{(DD')_x}{2a} \Rightarrow (DD')_x = \delta a$$

et d'après la relation (7) :  $\delta = \frac{\tau}{G}$

donc :  $(DD')_x = \frac{\tau a}{G}$

23. En identifiant les 2 expressions de  $(DD')_x$  :  $2a \frac{\sigma}{E} (1+\nu) = \frac{\tau a}{G}$

Comme  $\sigma = \tau$ , on a :  $E = 2G(1+\nu)$

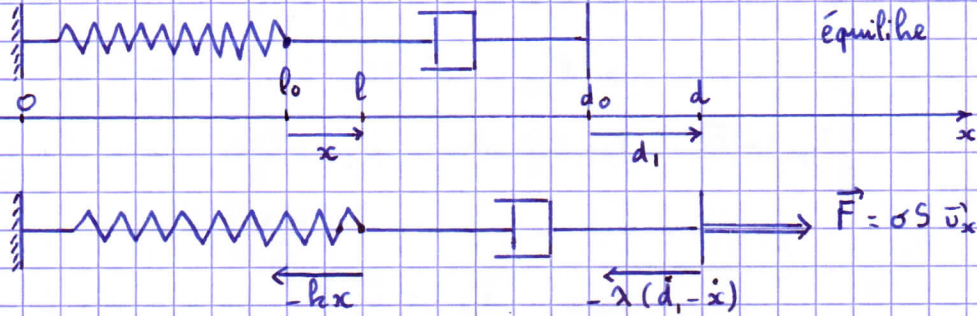
24. La figure 7 montre que deux contraintes normales à  $90^\circ$  sont équivalentes à une contrainte tangentielle à  $45^\circ$ .  
Cela peut expliquer l'apparition de plans de rupture à  $45^\circ$ .

## II Viscoélasticité d'une solution de polymères

25. La modélisation est linéaire car on suppose  $|\dot{x}| \ll \dot{d}_0$

26. Le modèle est plus adapté à un liquide viscoélastique car l'amortisseur représente des frottements fluides.

27.



En négligeant les termes d'accélération (effets inertiels), on a:  $F = \lambda(\dot{d}_1 - \dot{x}) = kx$

Nombre de cellules:  $\frac{d_0}{a} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = \frac{d_0}{a} \cdot BB' = d_0 E \\ x = \frac{d_0}{a} \cdot AA' = d_0 E_e \end{cases}$

On a aussi:  $E_v = \frac{A'B' - AB}{a} = \frac{BB' - AA'}{a} = E - E_e$

Donc:  $F = kx \Rightarrow \sigma S = k d_0 E_e \Rightarrow \sigma = \frac{k d_0}{S} E_e \Rightarrow E = \frac{k d_0}{S}$

$F = \lambda(\dot{d}_1 - \dot{x}) \Rightarrow \sigma S = \lambda(d_0 \dot{E} - d_0 \dot{E}_e) \Rightarrow \sigma = \frac{\lambda d_0}{S} (\dot{E} - \dot{E}_e) = \frac{\lambda d_0}{S} \dot{E}_v \Rightarrow \eta = \frac{\lambda d_0}{S}$

28.  $\sigma = \sigma_e = \sigma_v$  (éléments en série et effets inertiels négligés)

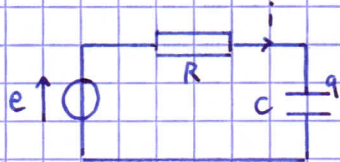
$\Rightarrow \sigma = \eta(\dot{E} - \dot{E}_e) = \eta(\dot{E} - \frac{\dot{\sigma}}{E})$

$\Rightarrow \frac{\eta}{E} \dot{\sigma} + \sigma = \eta \dot{E}$

$\Rightarrow \dot{\sigma} + \frac{E}{\eta} \sigma = E \dot{E}$  soit:  $\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{T} = E \dot{E}$  avec:  $T = \frac{\eta}{E}$

29.  $\sigma = \sigma_e = \sigma_v$  pour les éléments en série  $\Leftrightarrow$  conservation de  $i$  pour un circuit série

on peut proposer:



$Ri + \frac{q}{C} = e$

$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt}$  car  $i = \frac{dq}{dt}$

donc:  $\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = \frac{1}{R} \frac{de}{dt}$  analogue de:  $\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{T} = E \frac{dE}{dt}$

Correspondances:  $\sigma \leftrightarrow i$   $E \leftrightarrow e$   $E \leftrightarrow \frac{1}{R}$   $\eta \leftrightarrow C$

30. L'équation différentielle en notation complexe est:  $i\omega \underline{\sigma} + \frac{\sigma}{T} = i\omega E \underline{E}$

$i\omega \underline{E} \underline{E} + \frac{1}{T} \underline{E} \underline{E} = i\omega E \underline{E}$

donc:  $(i\omega T + 1) \underline{E} = i\omega T E$

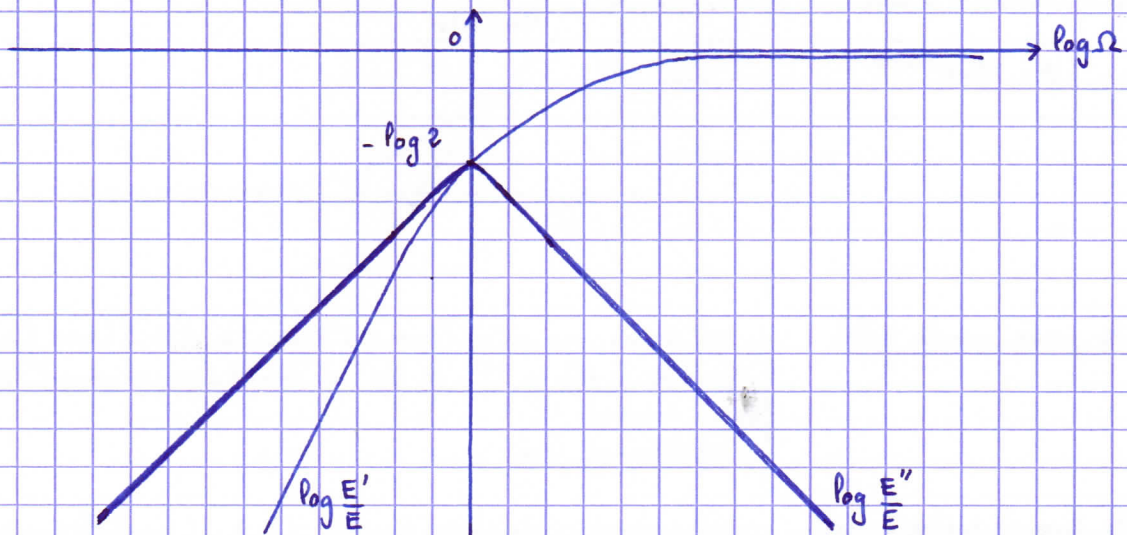
En posant  $\Omega = \omega T$ , on a:  $\underline{E} = \frac{i\Omega E}{1+i\Omega}$

On a:  $\underline{E} = \frac{i\Omega E(1-i\Omega)}{1+\Omega^2} \Rightarrow \underline{E}' = \frac{E\Omega^2}{1+\Omega^2} \quad \underline{E}'' = \frac{E\Omega}{1+\Omega^2}$

$\Omega \ll 1$ :  $\frac{E'}{E} \approx \Omega^2$  et  $\frac{E''}{E} \approx \Omega \Rightarrow \log \frac{E'}{E} = 2 \log \Omega$  et  $\log \frac{E''}{E} \approx \log \Omega$

$\Omega = 1$ :  $E' = E'' = \frac{E}{2} \Rightarrow \log \frac{E'}{E} = \log \frac{E''}{E} = -\log 2$

$\Omega \gg 1$ :  $\frac{E'}{E} \approx 1$  et  $\frac{E''}{E} \approx \frac{1}{\Omega} \Rightarrow \log \frac{E'}{E} = 0$  et  $\log \frac{E''}{E} = -\log \Omega$



Pour  $\Omega \gg 1$  ( $\omega \gg \frac{1}{T}$ ):  $\underline{E} \approx E$  le milieu a un comportement de solide élastique

Pour  $\Omega \ll 1$  ( $\omega \ll \frac{1}{T}$ ):  $\underline{E} \approx iE'' = iE\Omega = i\omega ET = i\omega \eta \Rightarrow \sigma = \eta \dot{\epsilon}$

$\Rightarrow$  le milieu a un comportement de fluide visqueux

$E' = E''$  pour  $\Omega = 1$ . Les deux effets sont comparables.

On a:  $\underline{E} = \frac{E}{2}(1+i) \Rightarrow$  contrainte et déformation sont déphasées de  $\frac{\pi}{4}$

32. Puissance reçue par l'échantillon:  $\mathcal{P} = F \cdot \dot{d}_1$

Donc:  $\mathcal{P}_v = \frac{F \dot{d}_1}{S d_0} = \sigma \cdot \dot{\epsilon}$  donc:  $\mathcal{P}_v = \sigma \cdot \dot{\epsilon}$

33.  $\langle \mathcal{P}_v \rangle = \langle \sigma \dot{\epsilon} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{\sigma} \cdot \underline{\dot{\epsilon}}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{E} \cdot \underline{E} \cdot \underline{\dot{\epsilon}}^*)$

On a:  $\underline{E} \cdot \underline{\dot{\epsilon}}^* = \epsilon_0 e^{i\omega t} \cdot (-i\omega \epsilon_0 e^{-i\omega t}) = -i\omega \epsilon_0^2$

donc:  $\langle \mathcal{P}_v \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}((E' + iE'')(-i\omega \epsilon_0^2))$

d'où:  $\langle \mathcal{P}_v \rangle = \frac{1}{2} \omega E'' \epsilon_0^2$

Analogie avec la puissance dissipée dans un milieu d'indice complexe en électromagnétisme.

34. □ : courbe de  $E'$       x : courbe de  $E''$

Le modèle de Maxwell convient sauf pour  $E''$  dans le domaine haute fréquence.

35. En haute fréquence:  $E' \approx E$  On lit:  $E = 20 \text{ Pa}$

$$\Omega = 1 \text{ pour } \omega = 7 \cdot 10^{-2} \text{ rads}^{-1} \Rightarrow T = \frac{1}{7 \cdot 10^{-2}} \approx 14$$

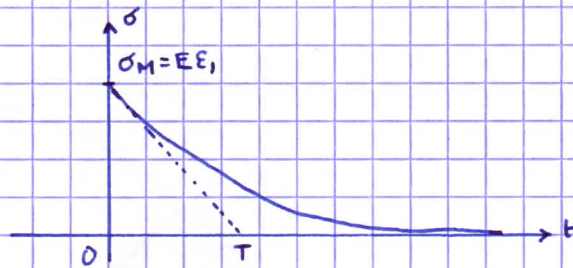
$$\Rightarrow \eta \approx 280 \text{ Pl}$$

36. La mise en mouvement de l'équipage mobile nécessite une énergie supplémentaire. Cela va modifier l'énergie dissipée dans le milieu. C'est donc  $E''$  (module de perte) qui est affecté par cette correction.

37.  $\dot{\epsilon} = 0$  pour  $t > 0$  donc:  $\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{T} = 0$  de solution  $\sigma = A e^{-\frac{t}{T}}$

$$A t = 0 : \sigma(0) = A = E \epsilon_1$$

$$\text{donc: } \sigma = E \epsilon_1 e^{-t/T}$$



38. • Pâte posée sur la table: on est dans une situation du type  $\Omega \ll 1$  (basse fréquence)  
D'après la question 31, le milieu a un comportement de fluide visqueux  
 $\Rightarrow$  étalement lent

• Pâte lancée contre le sol: on est dans une situation du type  $\Omega \gg 1$  (haute fréquence)  
D'après la question 31, le milieu a un comportement de solide élastique  
 $\Rightarrow$  rebond