Ecole Polytechnique. option PC. Epreuve A. 2015

1. Durée de l'aller et retour : $\Delta t = \frac{2D}{c} \Rightarrow D = \frac{c\Delta t}{2}$

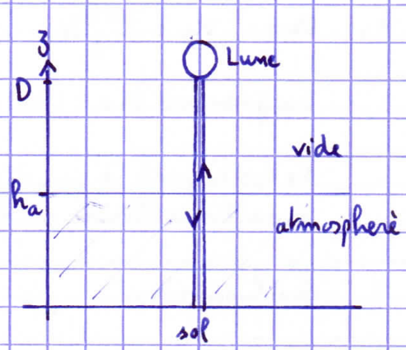
D'après le texte : $\Delta t \simeq 2,5$ s d'où : $\underline{D \simeq 3,8.10^8 \text{ m}}$

I. Traversée de l'atmosphère

2. On a maintenant : $\Delta t = 2\frac{D-h}{c} + 2\int_0^h \frac{n(z)}{c} dz$

$$= \frac{2D}{c} - \frac{2}{c}\int_0^h dz + \frac{2}{c}\int_0^h \frac{n(z)}{c} dz$$

$$= \frac{2D}{c} + \frac{2}{c}\int_0^h (n(z)-1)\,dz$$



$\Rightarrow D = \frac{c\Delta t}{2} - \int_0^{h_a} (n(z)-1)\,dz$

Par rapport à l'expression de la question 1, la correction est : $\boxed{\delta D = -\int_0^{h_a} (n(z)-1)\,dz}$

3. On a : $n(z) - 1 = K\rho(z)$. En $z=0$: $n_0 - 1 = K\rho_0 \Rightarrow n(z)-1 = (n_0-1)\frac{\rho(z)}{\rho_0}$

Equation de la statique des fluides pour l'atmosphère : $\frac{dP}{dz} = -\rho(z)g \Rightarrow \rho(z)dz = -\frac{dP}{g}$

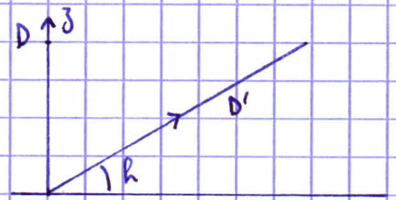
donc : $\delta D = -\int_0^{h_a} \frac{n_0-1}{\rho_0}\rho(z)\,dz = -\frac{n_0-1}{\rho_0}\int_0 -\frac{dP}{g} = \frac{n_0-1}{\rho_0 g}\left(\underset{0}{P(h_a)} - \underset{P_0}{P(0)}\right) = -\frac{n_0-1}{\rho_0 g}P_0$

D'après l'équation d'état du gaz parfait : $\rho_0 = \frac{MP_0}{RT_0}$ (M : masse molaire de l'air)

d'où : $\boxed{\delta D = -(n_0-1)H}$ avec : $\boxed{H = \frac{RT_0}{Mg}}$ H : hauteur caractéristique de la variation de pression dans l'atmosphère

4. A.N : $\underline{H = 8500 \text{ m}}$; $\underline{\delta D = -2,5 \text{ m}}$. Le texte parle de plusieurs mètres. C'est cohérent.

5.



On a : $\sin h = \frac{D}{D'} \Rightarrow$ trajet de longueur : $D' = \frac{D}{\sin h}$

On peut penser que maintenant : $\boxed{\delta D = -(n_0-1)\frac{H}{\sin h}}$

II. Trajet Terre-Lune

6. D'après l'énoncé : $\frac{\delta D}{D} = K\,V.\,c^\alpha$ où V est le potentiel gravitationnel dû au Soleil

L'énergie potentielle gravitationnelle d'une masse m s'écrit : $E_p = mV$

Donc : $[V] = ML^2.T^{-2}.M^{-1} = L^2T^{-2}$

Pour que $\frac{\delta D}{D}$ soit sans dimension, il faut avoir $\alpha = -2$. Donc : $\boxed{\frac{\delta D}{D} = K.\frac{V}{c^2}}$

On a : $V = -\mathcal{G}\frac{M_S}{D_\odot}$ où $\mathcal{G}$ est la constante de gravitation, M_S est la masse du Soleil

Calcul de $V_\oplus$: on écrit la loi de la quantité de mouvement pour la Terre, supposée ponctuelle, en mouvement circulaire autour du Soleil

$M_\oplus \vec{a} = -G \frac{M_\oplus M_S}{D_\odot^2} \vec{u}_r \Rightarrow \frac{V_\oplus^2}{D_\odot} = G\frac{M_S}{D_\odot^2}$ en projection selon $\vec{u}_r$ $\Rightarrow V_\oplus^2 = G\frac{M_S}{D_\odot}$

On constate donc que : $V = -V_\oplus^2$

Donc finalement : $\boxed{\frac{\delta D}{D} = -K\left(\frac{V_\oplus}{c}\right)^2}$

7. On a : $V_\oplus = \frac{2\pi D_\odot}{T}$ où $T = 1$ an $= 3{,}15.10^7$ s A.N : $\underline{V_\oplus = 3.10^4 \text{ m s}^{-1}}$

En prenant $K = 1$, on a : $\frac{\delta D}{D} \simeq -10^{-8}$ donc : $\underline{\delta D \simeq -4 \text{ m}}$

Le texte parle d'une dizaine de mètres. L'ordre de grandeur est correct. La coïncidence serait meilleure en prenant $K \simeq 2$.

III. L'écho lumineux

8. Laser vert $\Rightarrow \lambda = 0{,}53\ \mu m$ et impulsion d'énergie 300 mJ

Energie d'un photon : $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$

Puisqu'un photon de $\lambda = 1\mu m$ a une énergie de 2.10^{-19} J, on en déduit qu'un photon de $\lambda = 0{,}53\ \mu m$ a une énergie d'environ 4.10^{-19} J

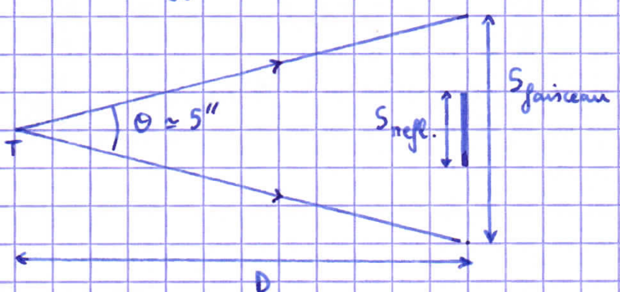
Le nombre de photons par impulsion est donc : $N = \frac{300.10^{-3}}{4.10^{-19}}$ A.N : $\underline{N \simeq 7{,}5.10^{17} \text{ photons}}$

C'est cohérent avec la valeur de 10^{18} donnée par le texte.

9. Si l'ouverture angulaire θ est due à la diffraction par la monture du télescope de diamètre $d_T = 1{,}5$ m, on a : $\sin\theta \simeq \frac{\lambda}{d_T} = 3{,}5.10^{-7}$ rad

Donc : $\theta \simeq 3{,}5.10^{-7}$ rad

Or le texte dit que l'ouverture est de l'ordre de $\theta = 1'' = 4{,}8.10^{-6}$ rad
C'est supérieur à la valeur attendue, donc <u>l'ouverture angulaire n'est pas due à la seule diffraction</u>.

10. 

$$\frac{\text{énergie reçue par le réflecteur}}{\text{énergie émise}} = \frac{S_{réflecteur}}{S_{faisceau}}$$

lignes 203 à 205 $\Rightarrow$

$S_{réflecteur} = 300 . \pi . \left(\frac{3{,}8.10^{-2}}{2}\right)^2 = 0{,}34 \text{ m}^2$

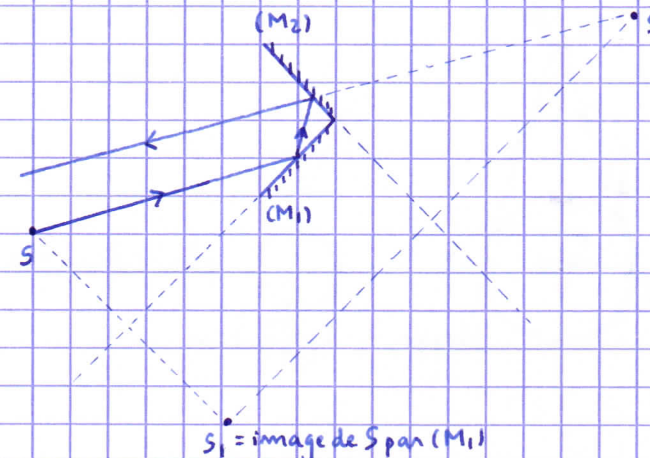
$\theta \ll 1$ rad $\Rightarrow$ le diamètre du faisceau vaut : $D\theta \simeq 9.10^3$ m
$\Rightarrow$ section du faisceau $S_{faisceau} = \pi\left(\frac{D\theta}{2}\right)^2 = 6{,}4.10^7 \text{ m}^2$

donc : $\frac{\text{énergie reçue par le réflecteur}}{\text{énergie émise}} = \frac{0{,}34}{6{,}4.10^7} \simeq \underline{5.10^{-9}}$

11. ligne 38 $\Rightarrow$ Un cataphote est un coin de cube

On fait un schéma à deux dimensions avec deux faces du coin :

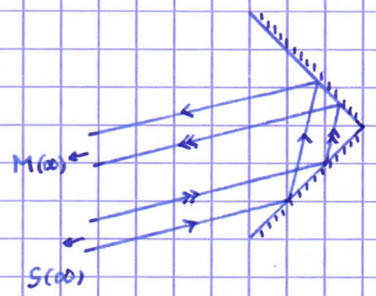
Ecole Polytechnique. Option PC. Epreuve A. 2015



Le rayon réfléchi revient bien dans la direction du rayon incident

12. Par stigmatisme des miroirs plans, on a : (SM) = cste

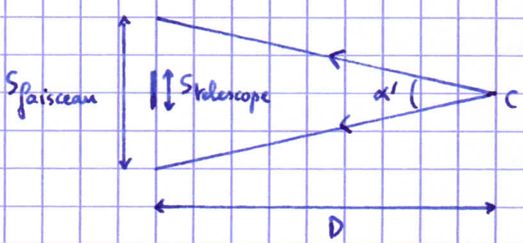
Le chemin optique est donc le même pour tous les rayons



13. On a : $\sin\alpha' \simeq \dfrac{\lambda}{d_c}$ où d_c est le diamètre d'un cataphote

A.N : $\sin\alpha' = 1{,}4.10^{-5}$ $\Rightarrow$ $\underline{\alpha' \simeq 1{,}4.10^{-5}\ rad = 3''}$

14.



$$\frac{\text{énergie reçue par le télescope}}{\text{énergie réfléchie}} = \frac{S_{telescope}}{S_{faisceau}}$$

$$S_{telescope} = \pi\left(\frac{d_T}{2}\right)^2 = 1{,}8\ m^2$$

$$S_{faisceau} = \pi\left(\frac{D\alpha'}{2}\right)^2 = 2{,}1.10^7\ m^2$$

donc : $\dfrac{\text{énergie reçue par le télescope}}{\text{énergie réfléchie}} = \underline{8.10^{-8}}$

15. En combinant les résultats des questions 10 et 14 :

$$\eta = \frac{\text{énergie reçue par le télescope}}{\text{énergie émise}} = 5.10^{-9} \cdot 8.10^{-8} \Rightarrow \underline{\eta \simeq 4.10^{-16}}$$

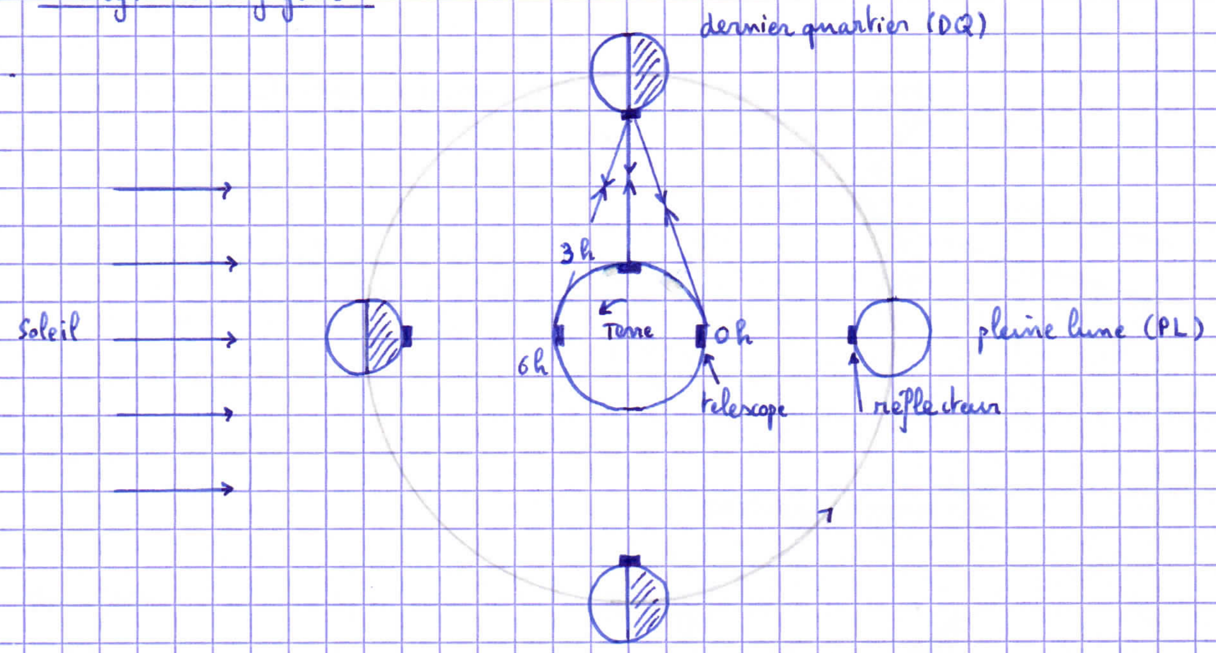
16. $\eta = \dfrac{N_{récupérés}}{N_{émis}}$ $\Rightarrow$ $N_{récupérés} = 4.10^{-16} \cdot 7{,}5.10^{17}$ $\Rightarrow$ $N_{récupérés} = \underline{300 \text{ photons}}$

C'est très supérieur à la valeur du texte (1 photon tous les 100 tirs).
Il faut tenir des photons absorbés par l'atmosphère.
Les miroirs sur la Lune ont peut-être aussi perdu une partie de leur pouvoir réfléchissant.

17. durée de l'impulsion $\Rightarrow$ étalement des temps d'aller et retour sur une plage $[\Delta t_{min}, \Delta t_{max}]$
$\Rightarrow$ incertitude sur D
accumulation des tirs $\Rightarrow$ incertitude de type A (statistiques sur n tirs)
$\Rightarrow$ réduction de l'incertitude par un facteur $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

IV. Analyse de la figure 2

18.

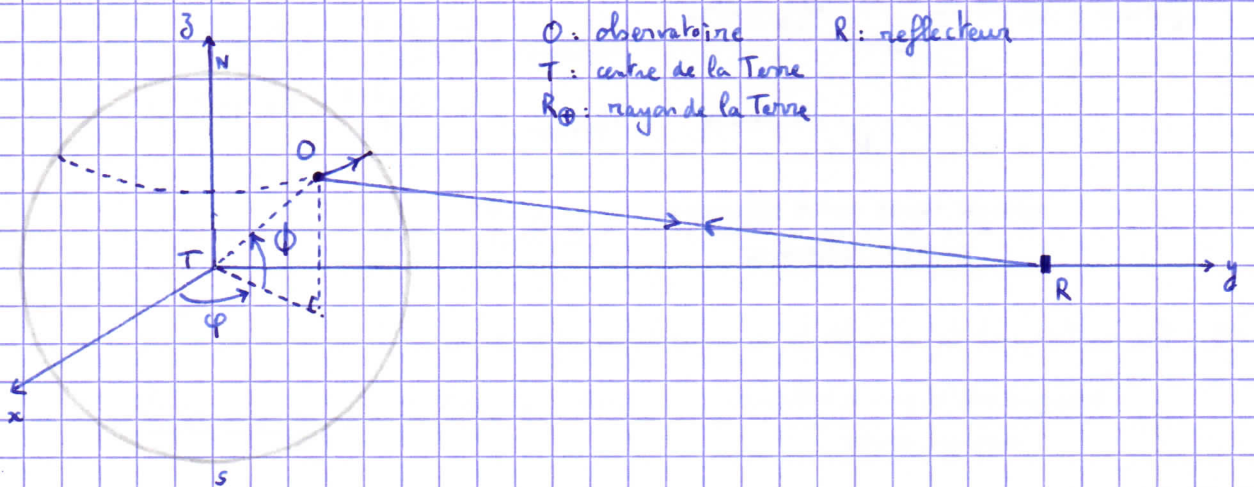


La Lune fait un tour autour de la Terre en environ 28 jours = 672 heures
⇒ pendant les 6 h de mesure sur la figure 2, on peut considérer que la Lune n'a presque pas bougé.

Parmi les trois positions proposées (PL, PQ, DQ), il faut trouver celle qui correspond à une durée d'aller-retour décroissante de 0h à 3h puis ensuite croissante
⇒ la figure ci-dessus montre que cela correspond au dernier quartier

19. La figure montre aussi que la rotation propre de la Terre est la principale cause de variation de la durée de l'aller et retour.
La Lune est au plus haut dans le ciel de l'observatoire à $t_0 = 3\,h$

20.



O : observatoire
T : centre de la Terre
$R_\oplus$: rayon de la Terre
R : réflecteur

La Terre (donc l'observatoire) tourne autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire ω telle que : $\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7{,}3.10^{-5}\ rad\,s^{-1}$

donc : $\varphi = \omega t + K$

Pour $t = t_0$, on a $\varphi = \frac{\pi}{2}$ car la distance OR est minimale ⇒ $K = \frac{\pi}{2} - \omega t_0$

Donc : $\varphi = \omega(t - t_0) + \frac{\pi}{2}$

Les coordonnées de O sont : $(R_\oplus \cos\Phi \cos\varphi\ ,\ R_\oplus \cos\Phi \sin\varphi\ ,\ R_\oplus \sin\Phi)$

donc: $OR = \left[(R_\oplus \cos\phi \cos\varphi)^2 + (TR - R_\oplus \cos\phi \sin\varphi)^2 + (R_\oplus \sin\phi)^2\right]^{1/2}$

$= \left[\underbrace{R_\oplus^2 \cos^2\phi \cos^2\varphi + R_\oplus^2 \cos^2\phi \sin^2\varphi}_{=} + TR^2 - 2TR.R_\oplus \cos\phi \sin\varphi + R_\oplus^2 \sin^2\phi\right]^{1/2}$

$= \left[\underbrace{R_\oplus^2 \cos^2\phi + R_\oplus^2 \sin^2\phi}_{=} + TR^2 - 2TR.R_\oplus \cos\phi \sin\varphi\right]^{1/2}$

$= \left[R_\oplus^2 + TR^2 - 2TR.R_\oplus \cos\phi \sin\varphi\right]^{1/2}$

$= TR\left[1 - 2\frac{R_\oplus}{TR}\cos\phi \sin\varphi + \frac{R_\oplus^2}{TR^2}\right]^{1/2}$

$\approx TR\left[1 - \frac{R_\oplus}{TR}\cos\phi \sin\varphi\right]$ car $TR \gg R_\oplus$

$= TR - R_\oplus \cos\phi \sin\varphi$

La durée de l'aller-retour est: $\Delta t = \frac{2.OR}{c} = \frac{2.TR}{c} - \frac{2R_\oplus}{c}\cos\phi \sin\left(\omega(t-t_0) + \frac{\pi}{2}\right)$

$= \frac{2.TR}{c} - \frac{2R_\oplus}{c}\cos\phi \cos(\omega(t-t_0))$

t étant voisin de t_0: $\cos(\omega(t-t_0)) \simeq 1 - \frac{1}{2}\omega^2(t-t_0)^2$

donc: $\boxed{\Delta t = \frac{2TR}{c} - \frac{2R_\oplus}{c}\cos\phi + \frac{R_\oplus \omega^2}{c}\cos\phi.(t-t_0)^2}$

On a bien un polynôme du 2^e degré en $(t-t_0)$, traduit graphiquement par une courbe parabolique.

21. On a: $\Delta t(t=t_0=3h) = \frac{2TR}{c} - \frac{2R_\oplus}{c}\cos\phi$

$\Delta t(t=0{,}4h) = \frac{2TR}{c} - \frac{2R_\oplus}{c}\cos\phi + \frac{R_\oplus \omega^2}{c}\cos\phi (t-t_0)^2$

$\Rightarrow \Delta t(t=0{,}4h) - \Delta t(t=3h) = \frac{R_\oplus \omega^2}{c}\cos\phi (t-t_0)^2$

$\Rightarrow \cos\phi = \frac{c}{R_\oplus \omega^2 (t-t_0)^2}\left[\Delta t(t=0{,}4h) - \Delta t(t=3h)\right]$

A.N: $\cos\phi = \frac{3.10^8}{6400.10^3.(7{,}3.10^{-5})^2(0{,}4-3)^2\,3600^2}(2{,}644 - 2{,}638) = 0{,}6$

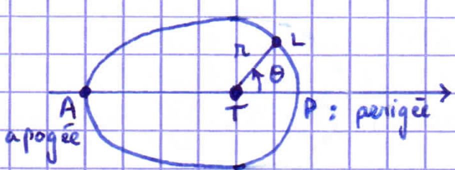
$\Rightarrow \underline{\phi \simeq 53°}$

V. Analyse de la figure 3

22. Hypothèses: - la Lune et la Terre sont assimilées à des points matériels
- la Lune est uniquement soumise à la force centrale d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre.

23. La cause principale de variation de la durée d'aller et retour est le caractère elliptique de la trajectoire de la Lune autour de la Terre.

24. Entre les deux maxima successifs, on a une période: $\underline{T \simeq 28 \text{ jours}}$



On a: $r_P = \frac{p}{1+e} = \frac{c\,\Delta t_{min}}{2}$ pour $\theta = 0$

$r_A = \frac{p}{1-e} = \frac{c\,\Delta t_{max}}{2}$ pour $\theta = \pi$

D'où : $2a = r_A + r_P \Rightarrow a = \frac{c}{4}(\Delta t_{min} + \Delta t_{max})$

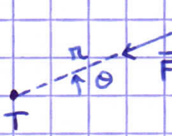
On lit figure 3 : $\Delta t_{min} \simeq 2,41\,s$; $\Delta t_{max} \simeq 2,68\,s \Rightarrow \underline{a = 3,8.10^8\,m}$

Puis : $\frac{r_P}{r_A} = \frac{1-e}{1+e} = \frac{\Delta t_{min}}{\Delta t_{max}} \Rightarrow e = \frac{\Delta t_{max} - \Delta t_{min}}{\Delta t_{max} + \Delta t_{min}}$ A.N : $\underline{e = 5.10^{-2}}$

25. Pas d'observation entre les jours 27 et 43 car c'est la nouvelle Lune.

VI. Test de physique

26. Même si $\mathcal{G}$ varie, la force d'attraction gravitationnelle de la Terre sur la Lune reste centrale, donc le <u>moment cinétique en T de la Lune se conserve.</u>



$\vec{F}_{T\to L} = -\mathcal{G}\frac{M_L M_\oplus}{r^2}\vec{u}_r$

$\vec{L}_L(T) = \vec{cste} \Rightarrow r^2\omega_L = cste = C \quad (\omega_L = \dot{\theta})$

27. <u>Loi de la quantité de mouvement à la Lune</u> : $M_L\vec{a} = \vec{F}_{T\to L} \Rightarrow -M_L r\omega_L^2 = -\mathcal{G}\frac{M_L M_\oplus}{r^2}$

d'où : $\omega_L^2 = \mathcal{G}\frac{M_\oplus}{r^3} = \mathcal{G}\frac{M_\oplus}{\left(\frac{C}{\omega_L}\right)^{3/2}} = \mathcal{G}\frac{M_\oplus}{C^{3/2}}\omega_L^{3/2}$

donc : $\sqrt{\omega_L} = \mathcal{G}\frac{M_\oplus}{C^{3/2}}$ <u>Si $\mathcal{G}$ diminue, alors ω_L diminue aussi</u> d'après cette relation

On a : $\omega_L = \mathcal{G}^2\left(\frac{M_\oplus}{C^{3/2}}\right)^2 \Rightarrow \frac{d\omega_L}{\omega_L} = 2\frac{d\mathcal{G}}{\mathcal{G}}$ <u>La variation relative de ω_L est de 2%</u>

28. D'après la loi de la quantité de mouvement (question 27) : $\omega_L^2 r^3 = \mathcal{G}M_\oplus$

On dérive par rapport au temps : $2\omega_L\frac{d\omega_L}{dt}r^3 + \omega_L^2 3r^2\frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{r}{\omega_L}\frac{d\omega_L}{dt}$

Avec : $r = 3,8.10^8\,m$; $\omega_L = \frac{2\pi}{28.24.3600} = 2,6.10^{-6}\,rad\,s^{-1}$; $\frac{d\omega_L}{dt} = -\frac{24''}{\text{siècle}^2} = -1,2.10^{-23}\,rad\,s^{-1}$

On calcule : $\frac{dr}{dt} = 1,1.10^{-9}\,m\,s^{-1} = \underline{3,6\,cm/an}$. La vitesse d'éloignement est cohérente.

29. Le système Terre-Lune est supposé isolé, donc <u>son moment cinétique total se conserve</u>

On a : $L_{total} = \underbrace{\frac{2}{5}M_\oplus R_\oplus^2\omega_T}_{\text{rotation propre de la Terre}} + \underbrace{\frac{2}{5}M_L R_L^2\omega_L}_{\text{rotation propre de la Lune}} + \underbrace{M_L\omega_L r^2}$ (r : distance Terre-Lune)

moment cinétique de la rotation de la Lune autour de la Terre

A.N : $\frac{2}{5}M_\oplus R_\oplus^2\omega_T \simeq 7.10^{33}\,kg\,m^2$; $\frac{2}{5}M_L R_L^2\omega_L \simeq 2.10^{29}\,kg\,m^2$; $M_L\omega_L r^2 \simeq 3.10^{34}\,kg\,m^2$

Le moment cinétique de rotation propre de la Lune est négligeable devant les 2 autres.

30. $L_{total} \simeq \frac{2}{5}M_\oplus R_\oplus^2\omega_T + M_L\omega_L r^2$ avec : $\omega_L^2 = \mathcal{G}\frac{M_\oplus}{r^3} \Rightarrow r = \left(\frac{\mathcal{G}M_\oplus}{\omega_L^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ (question 27)

$= \frac{2}{5}M_\oplus R_\oplus^2\omega_T + M_L\omega_L\frac{(\mathcal{G}M_\oplus)^{\frac{2}{3}}}{\omega_L^{4/3}}$

donc : $L_{total} = \frac{2}{5}M_\oplus R_\oplus^2\omega_T + \underbrace{\frac{M_L(\mathcal{G}M_\oplus)^{2/3}}{\omega_L^{1/3}}}_{\text{terme qui croît quand } \omega_L \text{ décroît}} = \text{constante}$

$\Rightarrow$ Le terme $\frac{2}{5}M_\oplus R_\oplus^2\omega_T$ doit décroître pour que L_{total} reste constant

$\Rightarrow$ ω_T <u>décroît</u> donc la période de rotation propre de la Terre $T_T = \frac{2\pi}{\omega_T}$ <u>augmente</u>.