# Polytechnique. ESPCI. Option PC. Epreuve A. 2017

## 1 Catapultes capillaires

1. avant coalescence : 2 gouttes de rayon $R$ $\rightarrow$ $E_s = 2.\gamma 4\pi R^2$
après coalescence : 1 goutte de rayon $R'$ $\rightarrow$ $E_s' = \gamma 4\pi R'^2$

$\Rightarrow \delta E_s = 4\pi\gamma(R'^2 - 2R^2)$

conservation du volume : $2.\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R'^3 \Rightarrow R' = R.2^{1/3}$

Finalement : $\boxed{\delta E_s = 4\pi\gamma R^2(2^{2/3} - 2)}$

2. Conservation de l'énergie : $E_s + 0 = E_s' + \frac{1}{2} m V_0^2 \Rightarrow V_0^2 = -\frac{2}{m}\delta E_s$

donc : $\boxed{V_0 = \sqrt{\frac{8\pi\gamma R^2}{m}(2 - 2^{2/3})}}$

On a $m = \rho.\frac{4}{3}\pi R^3.\underset{\uparrow \text{2 gouttes}}{2} \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{3\gamma}{\rho R}(2-2^{2/3})} = \left(\frac{3.70.10^{-3}.(2-1,6)}{10^3.10^{-3}}\right)^{1/2} = \sqrt{0,21.0,4} \Rightarrow \underline{V_0 \simeq 0,3\ m\,s^{-1}}$

3. Conservation de l'énergie : $\frac{1}{2} m V_0^2 + 0 = mgh + 0 \Rightarrow \boxed{h = \frac{V_0^2}{2g}}$

A.N : $h = \frac{0,21.0,4}{2.10}$ $\quad \underline{h \simeq 4\ mm}$

4. $E_s \sim E_c \Rightarrow \gamma R^2 \simeq m V^2 \Rightarrow \gamma R^2 \simeq \rho R^3.\left(\frac{R}{\tau}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\tau \simeq \sqrt{\frac{\rho R^3}{\gamma}}}$

A.N : $\tau \simeq \left(\frac{10^3.10^{-9}}{70.10^{-3}}\right)^{1/2} = \left(\frac{10^{-4}}{7}\right)^{1/2} = \frac{10^{-2}}{\sqrt{7}} \rightarrow \underline{\tau \simeq 4\ ms}$

5. Puissance dissipée par unité de volume : $\eta \sum_i^j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 \sim \eta\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{\eta}{\tau^2}$ $\quad (W.m^{-3})$

$\Rightarrow$ puissance $\simeq \frac{\eta}{\tau^2}.R^3 \quad (W)$

$\Rightarrow$ énergie $\simeq \frac{\eta}{\tau^2}.R^3.\tau = \frac{\eta R^3}{\tau} = \eta R^3\sqrt{\frac{\gamma}{\rho R^3}}$

l'énergie dissipée par viscosité est donc de l'ordre de : $\boxed{\eta\sqrt{\frac{\gamma R^3}{\rho}}}$

6. Bilan d'énergie en tenant compte de la dissipation : $E_s' + \frac{1}{2} m V_0^2 = E_s - E_{dissipée}$

$\delta E_s + \frac{1}{2} m V_0^2 = -E_{dissipée} \Rightarrow 4\pi\gamma\frac{R'^2}{2^{2/3}}(2^{2/3}-2) + \frac{1}{2}\rho\frac{4}{3}\pi R'^3 V_0^2 = -36\pi\eta\sqrt{\frac{\gamma R'^3}{\rho}}$

$\Rightarrow 4\pi\gamma R'^2(1 - 2^{1/3}) + \frac{2}{3}\rho\pi R'^3 V_0^2 = -36\pi\eta\sqrt{\frac{\gamma R'^3}{\rho}}$

$\Rightarrow V_0^2 = \frac{3}{2\pi\rho R'^3}\left[4\pi\gamma R'^2(2^{1/3}-1) - 36\pi\eta\sqrt{\frac{\gamma R'^3}{\rho}}\right]$

$= \frac{6\gamma}{\rho R'}(2^{1/3}-1) - \frac{54\eta}{\rho R'^3}\sqrt{\frac{\gamma R'^3}{\rho}}$

donc : $\boxed{V_0 = \left[\frac{6\gamma}{\rho R'}(2^{1/3}-1) - 54\eta\sqrt{\frac{\gamma}{\rho^3 R'^3}}\right]^{1/2}}$

On note : $V_0 = \left(\frac{A}{R'} - \frac{B}{R'^{3/2}}\right)^{1/2}$ avec : $A = \frac{6\gamma}{\rho}(2^{1/3}-1)$ $\quad B = 54\eta\sqrt{\frac{\gamma}{\rho^3}}$

on a : $\frac{dV_0}{dR'} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{R'} - \frac{B}{R'^{3/2}}\right)^{-1/2} \cdot \left(-\frac{A}{R'^2} + \frac{3}{2}B\frac{1}{R'^{5/2}}\right)$

vitesse d'éjection maximale si $\frac{dV_0}{dR'} = 0 \Rightarrow \frac{A}{R'^2} = \frac{3B}{2R'^{5/2}} \Rightarrow \sqrt{R'} = \frac{3B}{2A} \Rightarrow R' = \frac{9B^2}{4A^2}$

$\Rightarrow$ vitesse maximale pour : $\boxed{R' = 54^2\frac{\eta^2}{\rho\gamma}}$ (en utilisant $2^{1/3} - 1 = 1{,}25 - 1 = 0{,}25 = \frac{1}{4}$)

A.N : $R' \simeq 2516 . \frac{10^{-6}}{10^3 . 70.10^{-3}}$ $\quad \underline{R' \simeq 4.10^{-5}\,m}$

On calcule ensuite : $V_{0max} = \left(\frac{A}{\left(\frac{9B^2}{4A^2}\right)} - \frac{B}{\left(\frac{27B^3}{8A^3}\right)}\right)^{1/2} = \left(\frac{4A^3}{27B^2}\right)^{1/2}$

après simplification : $\boxed{V_{0max} = \frac{\gamma}{54\sqrt{2}\,\eta}}$

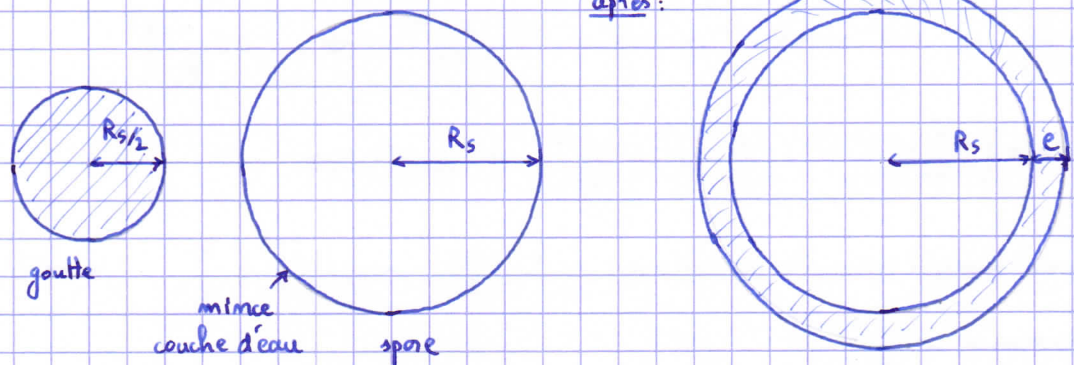
A.N : $V_{0max} = \frac{70.10^{-3}}{54 . 1{,}4 . 10^{-3}}$ $\quad \underline{V_{0max} \simeq 1\,m\,s^{-1}}$

Sur la figure 2, on lit $\underline{V_{0max}} \simeq 0{,}25\,m\,s^{-1}$ pour $2R' \simeq 10^{-4}\,m \rightarrow \underline{R' \simeq 5.10^{-5}\,m}$

Le modèle théorique est bon pour le calcul de $R'$, un peu moins pour celui de $V_{0max}$

## ② Application à l'éjection des spores de champignons

7 - avant : $\quad$ après :




$S = 4\pi\left(\frac{R_s}{2}\right)^2 + 4\pi R_s^2 = 5\pi R_s^2$ $\qquad S' = 4\pi(R_s+e)^2$

conservation du volume d'eau : $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R_s}{2}\right)^3 = 4\pi R_s^2 e \Rightarrow e = \frac{R_s}{24}$

$\Rightarrow S' = 4\pi R_s^2\left(1+\frac{1}{24}\right)^2 \simeq 4\pi R_s^2\left(1+\frac{1}{12}\right)$

donc : $\Delta S = S' - S = 4\pi R_s^2\frac{13}{12} - 5\pi R_s^2$ soit : $\boxed{\Delta S = -\frac{2}{3}\pi R_s^2}$

$\boxed{\Delta E_s = -\frac{2}{3}\gamma\pi R_s^2}$

8 - On admet : $\frac{1}{2}m_{tot}V_0^2 = \frac{2}{3}\gamma\pi R_s^2$

avec : $m_{tot} = m_{spore} + m_{goutte} = m + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R_s}{2}\right)^3 . \rho$

on a : $m_{goutte} = \frac{4}{3}\pi . \frac{(4.10^{-6})^3}{8} . 10^3 \simeq 32.10^{-18} . 10^3 = 3.10^{-14}\,kg \ll m = 4.10^{-13}\,kg$

donc : $V_0^2 \simeq \frac{4}{3}\frac{\gamma\pi R_s^2}{m} \Rightarrow \boxed{V_0 = 2R_s\sqrt{\frac{\gamma\pi}{3m}}}$ $\quad$ A.N : $\underline{V_0 \simeq 3\,m\,s^{-1}}$

Sur la photographie, pendant les 100 premières $\mu s$, on mesure une distance de 2,2 cm.
Avec l'échelle indiquée, cela correspond à un déplacement de la spore de : $\frac{2,2}{2,9} . 0,1\,mm \simeq 0,075\,mm$

La vitesse initiale est donc : $V_0 \simeq \frac{75.10^{-6}}{100.10^{-6}} \simeq \underline{0,8\,m\,s^{-1}}$

Le modèle théorique surestime la vitesse initiale

9 . $R_e = \frac{\rho_{air} . V_0 . 2R_S}{\eta_{air}}$ A.N : $R_e \simeq \frac{1,3 . 3 . 8.10^{-6}}{1,8.10^{-5}} \simeq \underline{2}$

10 . $R_e$ étant assez petit, l'écoulement est laminaire
$\Rightarrow$ la force de traînée est donnée par la formule de Stokes : $\boxed{\vec{F} = -6\pi\eta_a R_s \vec{V}}$

11 . $\|m\vec{g}\| \sim 4.10^{-12}$ N
$\|\vec{F}\| \sim 18 . 1,8.10^{-5} . 4.10^{-6} . 1 \sim 10^{-9}$ N

$\Rightarrow \|\vec{F}\| \gg \|m\vec{g}\|$ on peut négliger le poids

Loi de la quantité de mouvement selon l'axe Ox horizontal : $m\frac{dv}{dt} = -6\pi\eta_a R_s V$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta_a R_s}{m} v = 0$ de solution : $v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec : $\boxed{\tau = \frac{m}{6\pi\eta_a R_s}}$

en intégrant à nouveau : $x = V_0\tau(1 - e^{-t/\tau})$

donc : longueur de freinage : $\boxed{x_f \simeq V_0\tau}$

temps de freinage : $\boxed{t_f \simeq 5\tau}$

A.N : $\tau = \frac{4.10^{-13}}{18 . 1,8.10^{-5} . 4.10^{-6}} \simeq 3.10^{-4}$ s

$\Rightarrow \underline{x_f \simeq 3.10^{-4}\,m}$ (avec $V_0 \sim 1\,m\,s^{-1}$)

$\underline{t_f \simeq 10^{-3}\,s = 1\,ms}$

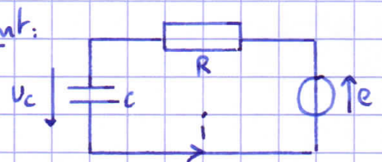
Sur la photographie, on lit : $x_f \simeq 2.10^{-4}$ m et $t_f \simeq 0,8$ ms $(8 \times 100\,\mu s)$

Les ordres de grandeurs sont respectés

## ③ Catapultes électromagnétiques

12. Energie magnétique : $\boxed{U_m = \frac{1}{2}Li^2}$   fem induite : $\boxed{e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Li)}$ (loi de Faraday)

Schéma équivalent :




loi des mailles : $u_c + e = Ri$

$u_c = \frac{d}{dt}(Li) + Ri$

$\Rightarrow \underbrace{u_c i}_{\text{puissance fournie par la source}} = i\frac{d}{dt}(Li) + \underbrace{Ri^2}_{\text{puissance Joule}}$

autre écriture du bilan de puissance : $u_c i = P_{\text{cinétique}} + P_{\text{magnétique}} + P_{\text{Joule}}$

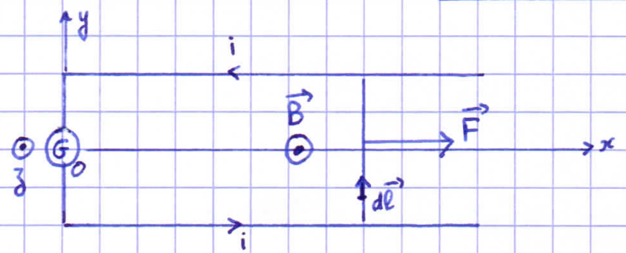
$= \frac{dE_c}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + Ri^2$

en identifiant : $i\frac{d}{dt}(Li) = \frac{dE_c}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) \Rightarrow i^2\frac{dL}{dt} + \cancel{Li\frac{di}{dt}} = \frac{dE_c}{dt} + \frac{i^2}{2}\frac{dL}{dt} + \cancel{Li\frac{di}{dt}}$

donc : $\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2}i^2\frac{dL}{dt}$

Or d'après le théorème de la puissance cinétique : $\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{méca}} = F.v$

donc : $F.\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}i^2\frac{dL}{dt} \Rightarrow \boxed{F = \frac{1}{2}\frac{dL}{dx}i^2}$




plan (Oxz) = plan d'antisymétrie des courants
⇒ en un point de ce plan, $\vec{B}$ appartient à ce plan

plan (Oxy) = plan de symétrie des courants
⇒ en un point de ce plan, $\vec{B}$ orthogonal à ce plan

⇒ $\vec{B}$ est selon Oz

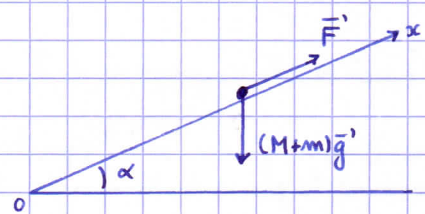
⇒ $\vec{F} = i\vec{dl} \wedge \vec{B}$ est selon Ox

13. $\Phi = \iint_{(S)} \vec{B}(x).\vec{dS} = \int_0^x \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} B(x)\,dx\,dy = \ell\int_0^x B(x)dx$

si $x \gg \ell$, le circuit est très long. On peut considérer qu'il y a invariance des courants par translation selon Ox ⇒ $B(x) = B$

donc $\Phi = \ell Bx = Li$ ⇒ <u>L varie linéairement avec x</u>

14. Loi de la quantité de mouvement à la partie mobile :




$(M+m)\frac{dv}{dt} = F - (M+m)g\sin\alpha$   avec : $F = \frac{1}{2}L_x i_0^2$

$v = \left(\frac{F}{M+m} - g\sin\alpha\right)t$   $(v(0)=0)$

$x = \left(\frac{F}{M+m} - g\sin\alpha\right)\frac{t^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{\frac{F}{M+m} - g\sin\alpha}}$

donc : $v(x) = \sqrt{\left(\frac{F}{M+m} - g\sin\alpha\right)2x} \Rightarrow \boxed{v(x) = \sqrt{\left(\frac{L_x i_0^2}{M+m} - 2g\sin\alpha\right)x}}$

15. Pour atteindre une certaine vitesse en minimisant $i_0$, il faut augmenter $L_x = \frac{dL}{dx}$

La courbe avec la plus grande pente est celle avec les croix x x $\Rightarrow$ $\underline{l = 20\,cm \text{ et } a = 1\,cm}$

16. D'après la question 14, on a : $i_0 = \sqrt{\frac{(M+m)}{L_x}\left(\frac{v^2}{x_{max}} + 2g\sin\alpha\right)}$

On calcule avec la figure 5 : $L_x \simeq \frac{4{,}5.10^{-6}}{3} \simeq 1{,}5.10^{-6}\ H.m^{-1}$

On calcule : $m = \rho_{Al} . l . a^2 = 2700 . 0{,}2.10^{-4} \simeq 5.10^{-2}\ kg$

On a : $\frac{v^2}{x_{max}} = \frac{2500}{1} \gg 2g\sin\alpha$

donc : $i_0 \simeq \left(\frac{0{,}5 . 2500}{1{,}5.10^{-6}}\right)^{1/2}$ $\qquad \underline{i_0 \simeq 3.10^4\ A}$

17. Ordre de grandeur du temps de catapultage : $t_c = \frac{x_{max}}{v}$ $\quad$ A.N : $t_c = \frac{1}{50} = 2.10^{-2}\,s$

Donc la charge nécessaire est environ : $q = i_0 . t_c$ $\quad$ A.N : $\underline{q \simeq 600\ C}$

18. Equation différentielle d'un circuit RLC : $Ri + \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$

En dérivant par rapport au temps : $\boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0}$

$\frac{L}{R}$ : temps caractéristique d'établissement du courant

$RC$ : temps caractéristique de la décharge du condensateur

$\frac{L}{R} \ll RC \Rightarrow$ $\underline{1^e \text{ phase très courte d'établissement de l'intensité initiale } i_0}$
$\underline{2^e \text{ phase de décharge du groupe de condensateurs}}$

19. Equation de la phase de décharge : $\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = 0$ $\quad$ d'où : $\boxed{i = i_0 e^{-t/RC}}$

20. résistance d'une ligne : $mR_0$
On a $n$ lignes en parallèle, donc : $\frac{1}{R_{tot}} = \frac{n}{mR_0}$ $\quad$ donc : $\boxed{R_{tot} = \frac{mR_0}{n}}$

Les lois d'association des condensateurs sont inverses de celles des résistances : $\boxed{C_{tot} = \frac{nC_0}{m}}$

La tension appliquée aux bornes de l'ensemble est : $\boxed{V = m\,\Delta V_0}$

$\Rightarrow Q_{max} = C_{tot} . m\,\Delta V_0$ $\qquad$ soit : $\boxed{Q_{max} = n C_0 \Delta V_0}$

21. D'après 19, le courant de décharge est : $i = i_0 e^{-\frac{t}{R_{tot}C_{tot}}}$

Pour trouver $i_0$, on écrit l'équation du circuit RLC (question 18) en négligeant L pendant la phase de décharge : $R_{tot}i + \frac{q}{C_{tot}} = 0$

A $t = 0$ : $R_{tot}i_0 + \frac{Q_{max}}{C_{tot}} = 0$ $\Rightarrow$ $i_0 = -\frac{Q_{max}}{R_{tot}C_{tot}} = -\frac{nC_0\Delta V_0}{\frac{mR_0}{n} . \frac{nC_0}{m}}$

$\Rightarrow \boxed{|i_0| = \frac{n\,\Delta V_0}{R_0}}$

avec $m = 3$, $\Delta V_0 = 3V$, $R_0 = 0{,}3.10^{-3}\,\Omega$ $\quad |i_0| = \dfrac{3.3}{3.10^{-4}} = 3.10^4$ A conforme à la question 16

temps caractéristique de décharge : $\tau = R_{tot} C_{tot} = R_0 C_0$ $\quad$ A.N : $\tau = 3.10^{-4}.3.10^3 \simeq 1\,s$

on a bien : $\tau \gg$ temps de catapultage $t_c \simeq 2.10^{-2}\,s$

on vérifie enfin : $\tau \gg \dfrac{L}{R_{tot}}$ car $\dfrac{L}{R_{tot}} = \dfrac{L}{\left(\frac{mR_0}{m}\right)} = \dfrac{4{,}5.10^{-6}}{\frac{10}{3}.3.10^{-4}} \simeq 5.10^{-3}\,s$

22. L'élévation de température est due à l'effet Joule dans les rails

Premier principe de la thermodynamique appliqué aux rails : $\Delta U_{rails} = W_{Joule}$

$$\Rightarrow \rho_{Al} \underbrace{(2x+\ell)a^2}_{\text{volume de rails}} . c_{Al}\, \Delta T = R i_0^2 . t_c \quad \text{avec : } R = \frac{1}{\gamma_{Al}} . \frac{2x+\ell}{a^2}$$

$$\Rightarrow \rho_{Al} \cancel{(2x+\ell)} a^2 c_{Al} \Delta T = \frac{1}{\gamma_{Al}} . \frac{\cancel{2x+\ell}}{a^2} i_0^2 t_c$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta T = \frac{i_0^2 t_c}{\rho_{Al} . c_{Al} . \gamma_{Al} . a^4}}$$

$$\text{A.N : } \Delta T = \frac{(3.10^4)^2 . 2.10^{-2}}{2{,}7.10^3 . 9.10^2 . 38.10^6 . 10^{-8}} = \frac{9 . 2 . 10^6}{2{,}7 . 9 . 38 . 10^3} \qquad \Delta T \simeq 20\,K$$

23. énergie utile = énergie cinétique $= \frac{1}{2}(M+m)V^2$ $\quad$ A.N : $E_c = \frac{1}{2} . 0{,}5 . 50^2 \simeq 600$ J

énergie emmagasinée par les condensateurs $= \dfrac{1}{2} \dfrac{Q_{max}^2}{C_{tot}}$ $\quad$ A.N : $U_c = \dfrac{1}{2} \dfrac{(3.3.10^3.3)^2}{\left(\frac{3}{10}.3.10^3\right)}$

$$= \frac{1}{2} . 10 . \frac{3.10^3 . 3^4}{3}$$

$$U_c \simeq 4.10^5\,J$$

Le rendement est : $\boxed{\eta = \dfrac{E_c}{U_c}}$ $\quad$ A.N : $\eta \simeq 1{,}5.10^{-3}$ très faible

L'intérêt est peut-être une usure moindre par rapport à un système purement mécanique.