Phrases "magiques"

Borne supérieure

☐ Il n'existe pas de "passage à la borne supérieure".

☐ On peut utiliser que N_∞ est une norme sans le démontrer. Attention, la démonstration de ce fait est régulièrement demandé comme question de cours aux écrits des concours.

Deux exemples à adapter à chaque cas:
• Si on a : $\forall x \in A,\ |f(x)| \leqslant M$
Ainsi M apparaît comme un majorant de $F = \{|f(x)|\ |x \in A\}$ (qui est ainsi une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ donc admet une borne supérieure *), **la borne supérieure de F est son plus petit majorant donc** $\sup F \leqslant M$**.**
La partie * peut être omise quand on connaît préalablement l'existence des bornes supérieures.
• Si on a : $\forall x \in A,\ |f(x)| \leqslant g(x)$ et g est majorée sur A
Comme $\sup_A g$ est un majorant de g sur A, on a : $\forall x \in A,\ |f(x)| \leqslant g(x) \leqslant \sup_A g$
Ainsi $\sup_A g$ apparaît comme un majorant de $F = \{|f(x)|\ |x \in A\}$ (qui est ainsi une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ donc admet une borne supérieure), la borne supérieure $\sup_A |f|$ de F est son plus petit majorant donc $\sup_A |f| \leqslant \sup_A g$.

Encadrement et limite

☐ Pour utiliser, la conservation des inégalités larges (dans $\mathbb{R}$ seulement) par passage à la limite, il faut préalablement s'assurer que chacune des trois suites est convergente.
En revanche, le **théorème d'encadrement** assure que si les deux suites extrêmes convergent vers la même limite, alors la suite encadrée CONVERGE (et vers la limite commune).

Notion de limite

On n'écrit jamais lim ou $\sum_{k=0}^{\infty}$ avant d'en avoir vérifié l'existence (quitte à écrire, sous réserve que la limite existe...). La plupart des théorèmes fournissant la valeur d'une limite, donnent aussi en premier lieu la CONVERGENCE i.e. l'existence de la limite (cf par exemple le théorème d'encadrement).

Pour pouvoir parler de limite, il faut avoir une norme ou une distance (souvent implicite dans les espaces vectoriels de dimension finie) donc pas de limite d'ensembles.

Intégration par parties

Première remarque, il y a un **s** à parties ... les correcteurs y tiennent! (cf rapport de jury)
Une proposition de rédaction (attention on complète les trous u puis v', puis u' et v):
Posons $u : t \mapsto ...$ et $v : t \mapsto ...$
qui sont bien de classe C^1 sur le **segment** $[a; b]$ (par théorèmes opératoires), et on a $u'(t) = ...$ et $v'(t) = ...$
Par intégration par parties, on obtient ...

Changement de variables dans une intégrale

Il y a une différence entre la façon dont on pense parfois le changement de variables (à la physicienne) et la façon de le rédiger proprement.

Soit l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *(segment sinon, il faut faire attention aux problèmes d'intégrabilité, cf plus loin)* à calculer.
1) premier cas (le cas simple)
La nouvelle variable s s'exprime en fonction de l'ancienne t i.e. $s = \varphi(t)$
Soit $\varphi : t \mapsto ..$ qui est de classe C^1 sur le segment $[a;b]$ *(remarque, sur un segment, on n'a pas besoin de plus).*
On a $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b h(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$
Autrement dit, on force l'apparition de φ' ce qui peut se voir ou nécessiter une division par φ' et dans ce cas on prendra soin que φ' ne s'annule pas. Puis on écrit tout en fonction de φ. Si le changement de variable est bien choisi, l'écriture sous la dernière forme doit se faire de manière assez naturelle.
Donc par le changement de variable φ de classe C^1 sur le segment $[a;b]$, on obtient
$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} h(t)\,\mathrm{d}t$

2) cas "inverse"
On pense à un changement de variable où l'on souhaite exprimer l'ancienne variable t en fonction de la nouvelle, i.e. poser $t = \Psi(u)$.
Soit $\Psi : t \mapsto ..$ qui est de classe C^1 sur le segment $[c;d]$ *(on choisit c et d des antécédents de a et b par Ψ).* Par ce changement de variable, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\Psi(c)}^{\Psi(d)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d (f(\Psi(s)))\Psi'(s)\,\mathrm{d}s$

3) cas d'une intégrale généralisée
Soit $\varphi : t \mapsto ..$ qui est de classe C^1, strictement croissante *(ou décroissante le cas échéant)* sur l'intervalle I, bijective entre les intervalles I et J. On a $\varphi' : t \mapsto ....$ D'après le théorème de changement de variable, $\int_I (f \circ \varphi)\varphi'$ et $\int_J f$ sont de même nature (convergentes, absolument convergentes ou divergentes).
Si on connaît la nature d'une des intégrales, on conclut directement et on ajoute, en cas de convergence, l'égalité des intégrales.
Comme dans le cas d'un segment, on peut voir le changement de variable dans les deux sens : un des deux cas (sens direct) demande une "préparation" de l'intégrande)

Rédaction de la résolution d'une équation aux dérivées partielles (moins important)
L'exemple qui suit est "compliqué" car général, dans les cas particuliers, les ouverts sont donnés, c'est plus simple à rédiger (cf les cas traités en exercices).
Pour résoudre (*) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$ l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$ par exemple.
Si f est solution de (*) alors
pour tout y fixé de $\mathbb{R}^{n-1}$ avec $I_y = \{x \in \mathbb{R}, |(x,y) \in U\}$ est non vide, on pose $g : x \in I_y \mapsto f(x,y)$.
Ainsi par composition, g est C^1 sur I_y et $g' = \frac{\partial f}{\partial x_1}(.,y) = 0$ donc g est constante sur l'INTERVALLE I_y (attention si I_y n'est pas un intervalle, écrire que g est constante sur chaque intervalle composant I_y, vous ne devriez pas tomber sur des cas plus pathologiques).
Donc il existe une fonction h définie sur $\{y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid I_y \neq \emptyset\}$ avec $f(x,y) = h(y)$ pour tout $(x,y) \in U$
On peut remplacer (suivant le cas) par : donc $f(x,y) = f(x_y, y)$ pour tout $(x,y) \in U$ (on choisit souvent x_y indépendant de y, on fait simplement attention à ce que x_y et x sont dans le même intervalle I_y)

Comme f est C^1, en fixant x, on obtient que h est C^1 (2ème méthode, si on choisit x_y de manière C^1 par rapport à y, alors par composition $y \mapsto f(x_y, y)$ est aussi C^1).
On vérifie alors (souvent on se contente de le dire) que les fonctions trouvées sont solutions (le seul problème qui se pose est en fait celui de la régularité).