

1) Equation de Maxwell. Ampere en régime stationnaire:  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

L'analogie de  $\vec{v}$  est le champ magnétique  $\vec{B}$

2) Equation de Maxwell du flux magnétique:  $\text{div } \vec{B} = 0$

Analogie:  $\text{div } \vec{v} = 0$  vérifié car l'écoulement est incompressible

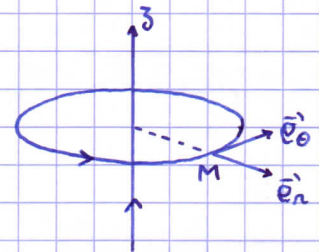
3) Théorème d'Ampère de la magnétostatique:  $\oint_{(C) \text{ fermée}} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{à travers}(C)}$

Analogie:  $\oint_{(C) \text{ fermée}} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \Gamma$  avec:  $\Gamma = \iint_{(S) \text{ s'appuyant sur } (C)} \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$

4) Si M ( $\vec{x} = \overrightarrow{OM}$ ) appartient à un plan de symétrie de vorticité:  $\vec{v} \perp$  ce plan  
 Si M appartient à un plan d'antisymétrie de vorticité:  $\vec{v} \in$  ce plan

5) Invariance par translation selon  $Oz$  }  $\vec{v}(M) = \vec{v}(r)$   
 rotation autour de  $Oz$  }

Le plan  $(M, \vec{v}_n, \vec{v}_z)$  est plan de symétrie de la vorticité  
 $\Rightarrow \vec{v}(M) = v_\theta(r) \vec{e}_\theta$



Théorème d'Ampère pour le cercle de rayon r passant par M:

$$\int_{\text{cercle}} v_\theta(r) \vec{e}_\theta \cdot (r d\theta \vec{e}_\theta) = \Gamma \Rightarrow 2\pi r v_\theta(r) = \Gamma \Rightarrow \vec{v}(M) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

### 1. Mouvement de lignes de vorticité

6) On a les mêmes invariances et symétries qu'à la question 5) donc:  $\vec{v}(M) = v_\theta(r) \vec{e}_\theta$

Théorème d'Ampère au cercle de rayon r:  $2\pi r v_\theta(r) = \iint_{\text{disque de rayon } r} \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$  ( $d\vec{S} = dS \vec{e}_z$ )

1<sup>er</sup> cas:  $r < a$   $\iint_{\text{disque}} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \Omega \pi r^2$

donc:  $2\pi r v_\theta(r) = \Omega \pi r^2 \Rightarrow \vec{v}(M) = \frac{1}{2} \Omega r \vec{e}_\theta$

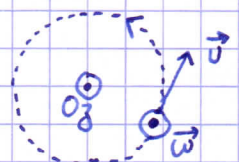
2<sup>e</sup> cas:  $r > a$   $\iint_{\text{disque}} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \Omega \pi a^2$

donc:  $2\pi r v_\theta(r) = \Omega \pi a^2 \Rightarrow \vec{v}(M) = \frac{1}{2} \Omega \frac{a^2}{r} \vec{e}_\theta$

7) Les lignes de courant sont les cercles d'axe  $Oz$ .

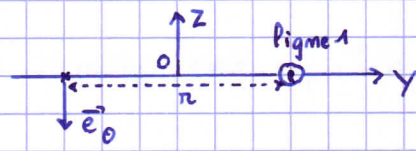
En régime stationnaire les lignes de courant sont aussi les trajectoires des particules fluides.

- $\Rightarrow$  les particules fluides décrivent des cercles d'axe  $Oz$
- $\Rightarrow$  la vorticité  $\vec{\omega}$  se déplace aussi selon des cercles d'axe  $Oz$
- $\Rightarrow$  la symétrie de révolution autour de  $Oz$  est conservée.
- $\Rightarrow$  la distribution de vorticité est invariante et le tube de vorticité est immobile





8) Au niveau de la ligne 2:  $\vec{e}_0 = -\vec{e}_z$  et  $r = l$



La vitesse induite par la ligne 1 est donc:  $\vec{v}_1 = -\frac{\Gamma_0}{2\pi l} \vec{e}_z$

Au niveau de la ligne 1:  $\vec{e}_0 = +\vec{e}_z$

La vitesse induite par la ligne 2 est:  $\vec{v}_2 = +\frac{(-\Gamma_0)}{2\pi l} \vec{e}_z$  On a donc bien  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$

Les deux lignes ont à chaque instant la même vitesse constante. Elles se déplacent avec un mouvement rectiligne uniforme selon  $-\vec{e}_z$  et gardent leur position relative.

9) Pour un fluide parfait, le champ de vitesse doit être tangent à la paroi:  $\vec{v} \cdot \vec{e}_y = 0$

10) La situation analogue en magnétostatique est celle où le champ magnétique appartient au plan  $Y=0$ . Ce plan est donc un plan d'antisymétrie des courants

Le plan  $Y=0$  doit donc être un plan d'antisymétrie de la vorticité, d'où une circulation  $\Gamma_0$  selon  $-\vec{e}_x$ .

On est ramené à la situation de la question 8 avec  $l = 2d$ , donc la ligne de vorticité se déplace selon  $-\vec{e}_z$  avec la vitesse:

$$\vec{v} = -\frac{\Gamma_0}{4\pi d} \vec{e}_z$$

## 2. Anneau de vorticité

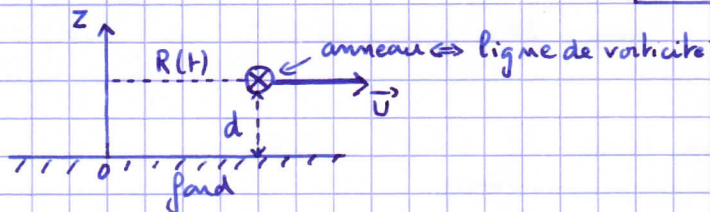
11) Invariance par rotation autour de  $Ox$ :  $\vec{v}(M)$  ne dépend pas de  $\theta$

Le plan  $x=0$  de l'anneau est plan de symétrie de la vorticité  
Analogie magnétostatique: si  $M \in$  plan  $x=0$ , alors  $\vec{v}(M) \perp$  plan  $x=0$

Soit  $M(r=R, \theta, x=0)$  un point de l'anneau. On a donc:  $\vec{v}(M) = V \vec{e}_x$   
Le champ de vitesse est le même en tout point de l'anneau.  
L'anneau va avoir un mouvement de translation selon  $Ox$ .

$$12) V = C R^\alpha \Gamma^\beta \Rightarrow [L.T^{-1}] = [L]^\alpha \cdot [L^2 T^{-1}]^\beta \Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + 2\beta \\ -1 = -\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

13) On a la situation suivante:



D'après la question 10), la ligne va se déplacer parallèlement au fond avec la vitesse:  $\frac{\Gamma_0}{4\pi d}$

D'après la figure 5: 4,6 cm sur la feuille correspondent à 1 cm pour le rayon  
on mesure 0,7 cm entre les 2 derniers triangles  
 $\Rightarrow$  pendant 0,21 s le déplacement de l'anneau est:  $\frac{0,7}{4,6} \cdot 1 = 0,15$  cm  
 $\Rightarrow$  vitesse  $|v| = \frac{0,15 \cdot 10^{-2}}{0,21} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$



En ordonnée: 1,7 cm sur la feuille correspondent à 1 cm pour l'altitude  
 on en déduit:  $d = \frac{0,5}{1,7} \cdot 1 = 0,3 \text{ cm}$

On a:  $|\Gamma| = |v| \cdot 4\pi d$  A.N:  $|\Gamma| = 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

14) Pendant la phase initiale, le déplacement vertical de l'anneau pendant 0,21 s est:  
 $\frac{0,4}{1,7} \cdot 1 = 0,24 \text{ cm}$  (on mesure en moyenne 0,4 cm entre deux triangles)

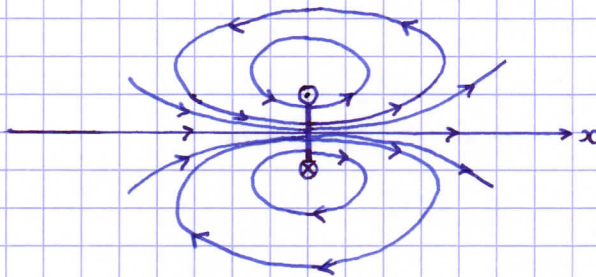
$\Rightarrow$  vitesse de l'anneau  $|v| = \frac{0,24 \cdot 10^{-2}}{0,21} = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-1} = v$

La relation (3) s'écrit:  $V = C \frac{\Gamma}{R} \Rightarrow C = \frac{RV}{\Gamma}$

On mesure R sur la figure par:  $R = \frac{2,7}{4,6} \cdot 1 = 0,59 \text{ cm}$

A.N:  $C = 0,25$

15)



Pour une spire de courant:  $\vec{m} = I \vec{S}$   
 $= I \pi R^2 \vec{e}_x$

Donc pour l'anneau:  $\vec{m} = \Gamma \pi R^2 \vec{e}_x$

16) Sur l'axe Ox:  $\theta = 0$  donc:  $\vec{u} = \frac{2 \|\vec{m}\|}{4\pi L^3} \vec{e}_x = \frac{2 \Gamma \pi R^2}{4\pi L^3} \vec{e}_x$  soit:  $\vec{u} = \frac{\Gamma R^2}{2L^3} \vec{e}_x$

17) D'après la question précédente:  $\vec{u}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\Gamma_1 R_1^2}{2\zeta^3} \vec{e}_x$  et  $\vec{u}_{2 \rightarrow 1} = \frac{\Gamma_2 R_2^2}{2\zeta^3} \vec{e}_x$

18) On a:  $\vec{u}_1 = \frac{dx_1}{dt} \vec{e}_x = \vec{u}_{1 \rightarrow 1} + \vec{u}_{2 \rightarrow 1}$  donc:  $\frac{dx_1}{dt} = C \frac{\Gamma_1}{R_1} + \frac{\Gamma_2 R_2^2}{2\zeta^3}$  (1)

De même  $\vec{u}_2 = \frac{dx_2}{dt} \vec{e}_x = \vec{u}_{2 \rightarrow 2} + \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$  donc:  $\frac{dx_2}{dt} = C \frac{\Gamma_2}{R_2} + \frac{\Gamma_1 R_1^2}{2\zeta^3}$  (2)

(2) - (1) donne:  $\frac{d\zeta}{dt} = C \left( \frac{\Gamma_2}{R_2} - \frac{\Gamma_1}{R_1} \right) + \frac{\Gamma_1 R_1^2 - \Gamma_2 R_2^2}{2\zeta^3}$

19) On réécrit:  $\frac{d\zeta}{dt} = C \left[ (1+\epsilon) \frac{\Gamma_1}{R_1} - \frac{\Gamma_1}{R_1} \right] + \frac{\Gamma_1 R_1^2 - (1+\delta) \Gamma_1 R_1^2}{2\zeta^3} = C \epsilon \frac{\Gamma_1}{R_1} - \frac{\delta \Gamma_1 R_1^2}{2\zeta^3}$

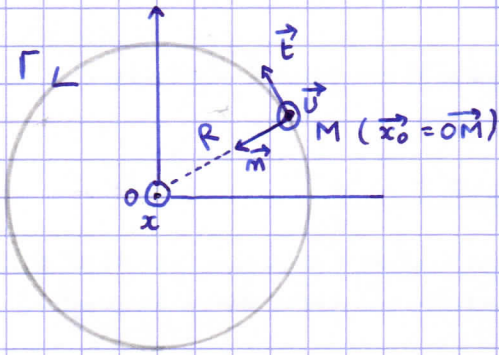
Selon la valeur initiale  $\zeta_0$ , on a  $\left( \frac{d\zeta}{dt} \right)_{t=0} > 0$  ou  $\left( \frac{d\zeta}{dt} \right)_{t=0} < 0$  donc les anneaux peuvent s'éloigner ou se rapprocher.

Valeur critique  $\zeta_c$  telle que:  $\left( \frac{d\zeta}{dt} \right)_{t=0} = 0 \Rightarrow C \epsilon \frac{\Gamma_1}{R_1} = \frac{\delta \Gamma_1 R_1^2}{2\zeta_c^3} \Rightarrow \zeta_c = R_1 \left( \frac{\delta}{2C\epsilon} \right)^{1/3}$

20) Lorsque les anneaux se rapprochent, l'approximation dipolaire  $\zeta \gg R_1$  et  $R_2$  n'est plus valable. Donc le modèle ne convient plus.

### 3. Auto-induction d'une ligne de vorticité

21)



$$\text{Equation (6): } \vec{v} = c \Gamma \frac{\vec{E} \wedge \vec{m}}{R}$$

$$\text{On ici: } \vec{E} \wedge \vec{m} = \vec{e}_x \text{ et } R = R$$

$$\text{Donc: } \vec{v} = c \frac{\Gamma}{R} \vec{e}_x$$

On retrouve bien la vitesse de l'anneau des questions 11) et 12)

$$22) \vec{v} = \frac{\partial Y}{\partial t} \vec{e}_y + \frac{\partial Z}{\partial t} \vec{e}_z$$

$$\text{et la relation (6) donne: } \vec{v} = c \Gamma_0 \frac{\vec{E} \wedge \vec{m}}{R} = c \Gamma_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \Gamma_0 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \\ c \Gamma_0 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{donc: } \frac{\partial Y}{\partial t} = -c \Gamma_0 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \text{ et } \frac{\partial Z}{\partial t} = c \Gamma_0 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

$$23) \text{ En notation complexe ces relations donnent: } \begin{cases} i\omega Y_0 = -c \Gamma_0 (-k^2) Z_0 \\ i\omega Z_0 = c \Gamma_0 (-k^2) Y_0 \end{cases} (*)$$

$$\text{En les multipliant: } -\omega^2 Y_0 Z_0 = -c^2 \Gamma_0^2 k^4 Z_0 Y_0$$

$$\text{D'où la relation de dispersion: } \omega = c \Gamma_0 k^2$$

Vitesse de phase:  $v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{c \Gamma_0}$  -  $v_{\varphi}$  depend de  $\omega$  donc ces ondes sont dispersives.

$$24) \text{ On reporte la relation de dispersion dans la relation (*): } i\omega Y_0 = c \Gamma_0 \left( \frac{\omega}{c \Gamma_0} \right) Z_0$$

$$\text{Donc: } Z_0 = i Y_0 \Rightarrow \begin{cases} |Z_0| = |Y_0| \text{ même amplitude pour } Y(t) \text{ et } Z(t) \\ Z_0 \text{ déphasé de } \frac{\pi}{2} \text{ par rapport à } Y_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  polarisation circulaire

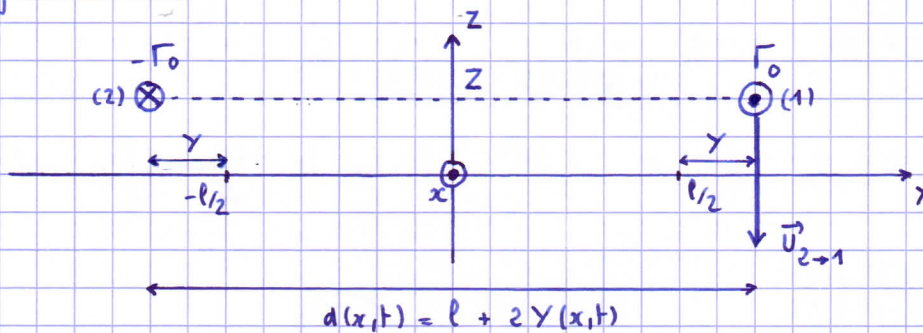
Un point de la ligne d'axe  $x$  fixé va décrire un cercle d'axe  $Ox$  au cours du temps. La ligne de vorticité a la forme d'une hélice.

25) Les déplacements transverses doivent être petits devant la longueur d'onde  $\lambda$ .



4. Sillage d'un avion

26)

27) En utilisant le résultat de la question 8 : 
$$\vec{u}_{2 \rightarrow 1}(x,t) = -\frac{\Gamma_0}{2\pi(\ell + 2Y)} \vec{e}_z$$
28) 
$$\vec{u}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{\Gamma_0}{2\pi\ell(1 + \frac{2Y}{\ell})} \vec{e}_z = -\frac{\Gamma_0}{2\pi\ell} \left(1 - \frac{2Y}{\ell}\right) \vec{e}_z \quad \text{car } Y \ll \ell$$

donc : 
$$\vec{u}_{2 \rightarrow 1} = \left(-\frac{\Gamma_0}{2\pi\ell} + \frac{\Gamma_0 Y}{\pi\ell^2}\right) \vec{e}_z$$

On a : 
$$\vec{u}_1 = \vec{u}_{1 \rightarrow 1} + \vec{u}_{2 \rightarrow 1} = \left(-c\Gamma_0 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \vec{e}_y + c\Gamma_0 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \vec{e}_z\right) + \left(-\frac{\Gamma_0}{2\pi\ell} + \frac{\Gamma_0 Y}{\pi\ell^2}\right) \vec{e}_z$$

d'où : 
$$\frac{\partial Y}{\partial t} = -c\Gamma_0 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = c\Gamma_0 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\Gamma_0}{2\pi\ell} + \frac{\Gamma_0 Y}{\pi\ell^2}$$

29) On a : 
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\Gamma_0}{2\pi\ell}$$

d'où : 
$$\frac{\partial Y}{\partial t} = -c\Gamma_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = c\Gamma_0 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\Gamma_0 Y}{\pi\ell^2}$$

D'après la question 8, les deux lignes de vorticité (non perturbées) ont tendance à se déplacer selon  $-\vec{e}_z$  à la vitesse  $-\frac{\Gamma_0}{2\pi\ell} \vec{e}_z$ , d'où un déplacement selon Oz de  $-\frac{\Gamma_0}{2\pi\ell} t$ .

Ce changement de variable permet de se placer dans un référentiel où ce mouvement de dérive n'apparaît plus.

30) En notation complexe, ces deux relations deviennent : 
$$\begin{cases} i\omega Y_0 = c\Gamma_0 k^2 \xi_0 \\ i\omega \xi_0 = -c\Gamma_0 k^2 Y_0 + \frac{\Gamma_0}{\pi\ell^2} Y_0 \end{cases} \quad (*)$$

En les multipliant : 
$$-\omega^2 = c\Gamma_0 k^2 \left(-c\Gamma_0 k^2 + \frac{\Gamma_0}{\pi\ell^2}\right)$$

$$\omega^2 = c^2 \Gamma_0^2 k^2 \left(k^2 - \frac{1}{\pi c \ell^2}\right)$$

$\omega$  imaginaire pure si  $\omega^2 < 0 \Rightarrow k < \frac{1}{\sqrt{\pi c \ell}}$

On a alors :  $\omega = \pm i|\omega|$  ce qui donne :  $\exp(i\omega t) = \exp(\pm|\omega|t)$   
D'où l'existence de solutions exponentiellement croissantes dans le temps.

$$31) k < \frac{1}{\sqrt{\pi c l}} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} < \frac{1}{\sqrt{\pi c l}} \Rightarrow \boxed{\lambda > \lambda_c = 2\pi \sqrt{\pi c l}}$$

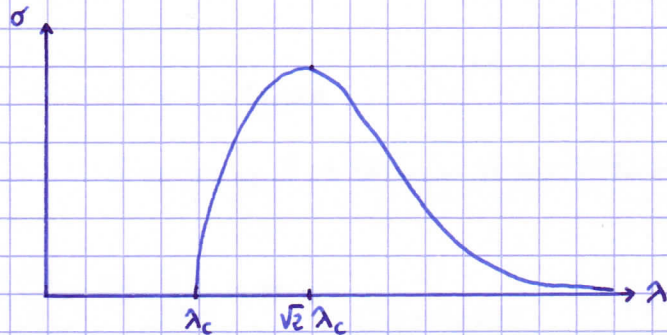
$$32) \text{ On a: } \sigma = C \Gamma_0 k \sqrt{\frac{1}{\pi c l^2} - k^2} = C \Gamma_0 k \sqrt{k_c^2 - k^2} \quad \text{avec: } k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c}$$

$$\text{donc: } \frac{d\sigma}{dk} = C \Gamma_0 \sqrt{k_c^2 - k^2} + C \Gamma_0 k \frac{-2k}{2\sqrt{k_c^2 - k^2}} = \frac{C \Gamma_0}{\sqrt{k_c^2 - k^2}} (k_c^2 - k^2 - k^2)$$

$$\frac{d\sigma}{dk} = 0 \Rightarrow k_c^2 - k^2 - k^2 = 0 \Rightarrow 2k^2 = k_c^2 \Rightarrow k = \frac{k_c}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\lambda_m = \sqrt{2} \lambda_c}$$

$$33) \text{ On a: } \sigma = C \Gamma_0 \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2}$$

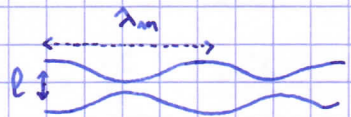
$$= C \Gamma_0 \frac{4\pi^2}{\lambda} \sqrt{\frac{1}{\lambda_c^2} - \frac{1}{\lambda^2}}$$



34) Photo supérieure: l'écart entre les deux lignes est de l'ordre de grandeur de la taille de l'avion, soit  $l \sim 1 \text{ m}$

$$\text{On a alors: } \lambda_m = \sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,25} \cdot 1 \sim 8 \text{ m}$$

Photo inférieure: la longueur d'onde  $\lambda_m$  (période spatiale) est bien de l'ordre de 8 fois l'écartement entre les 2 lignes



35) Pour avoir une onde, il faut  $\omega$  réel, donc on se place dans le cas  $k > k_c$ , i.e.:  $\lambda < \lambda_c$

$$\text{La relation de dispersion devient: } \omega = C \Gamma_0 k \sqrt{k^2 - k_c^2}$$

$$\text{La relation (*) devient: } i C \Gamma_0 k \sqrt{k^2 - k_c^2} Y_0 = C \Gamma_0 k^2 E_0 \Rightarrow E_0 = i \frac{\sqrt{k^2 - k_c^2}}{k} Y_0$$

$$\Rightarrow E_0 = i \sqrt{1 - \left(\frac{k_c}{k}\right)^2} Y_0$$

$$\Rightarrow E_0 = i \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} Y_0$$

$E_0$  et  $Y_0$  sont déphasés de  $\frac{\pi}{2}$  et  $|E_0| \neq |Y_0| \Rightarrow$  polarisation elliptique centrée sur les axes  $OY$  et  $OZ$ .

Si  $\lambda \ll \lambda_c \rightarrow$  On retrouve la polarisation circulaire de la question 24)

$$\text{C'est normal car } \lambda \ll \lambda_c \Rightarrow \lambda \ll l$$

$\Rightarrow$  les deux lignes sont très éloignées l'une de l'autre

$\Rightarrow$  elles se comportent comme si elles étaient seules

Si  $\lambda \rightarrow \lambda_c$ :  $E_0 \approx 0$  polarisation rectiligne selon  $OY$

La polarisation évolue donc du circulaire au rectiligne en passant par l'elliptique quand  $\lambda$  augmente.

Par symétrie les polarisations de deux lignes sont inverses: l'une droite l'autre gauche.