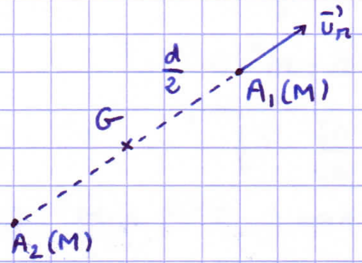
Polytechnique _ ESPCI _ Physique A _ 2018

Problème

1 . Loi de la quantité de mouvement (LQDM) à l'astre A_1 dans $R(Gxyz)$ galiléen : $M\vec{a}_{A_1} = \vec{F}_{A_2 \to A_1}$

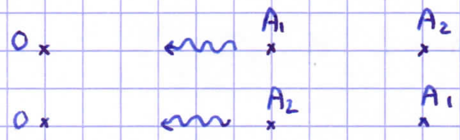


Selon $\vec{u}_r$: $-M\frac{d}{2}\dot{\theta}^2 = -G\frac{M.M}{d^2} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2GM}{d^3}$

D'où la fréquence de rotation : $\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2GM}{d^3}}}$

2 . Analogie avec les <u>ondes électromagnétiques</u>

3 . Lorsque les deux astres font un tour complet pendant une période $T = 1/f$, le point d'observation O "voit" deux fois la même situation. D'où <u>la fréquence double</u>.



4 . Mesure de variation de longueur de l'ordre de λ.
On a intérêt à construire un instrument aussi grand que possible pour réduire l'incertitude relative

5 . On calcule l'énergie mécanique du système des deux astres :

$$E_m = 2 \cdot \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{GM^2}{d} = M\left(\frac{d}{2}\dot{\theta}\right)^2 - \frac{GM^2}{d} = M\frac{d^2}{4}\cdot\frac{2GM}{d^3} - \frac{GM^2}{d} = -\frac{GM^2}{2d}$$

Si E_m décroît, alors d diminue aussi $\Rightarrow$ <u>les deux astres se rapprochent</u>

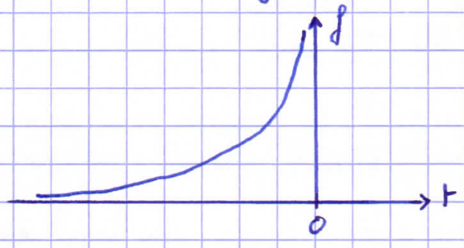
6 . d diminue au cours du temps $\Rightarrow$ f augmente $\Rightarrow$ <u>$K > 0$</u>

On a : $\frac{df}{f^{11/3}} = K\,dt \Rightarrow \frac{f^{-\frac{11}{3}+1}}{-\frac{11}{3}+1} = Kt + \text{cte} \Rightarrow -\frac{3}{8f^{8/3}} = Kt + \text{cte}$

Pour que ce soit cohérent avec la question 8, on prend $f \to +\infty$ à $t = 0$ d'où : cte $= 0$

Donc : $f^{8/3} = -\frac{3}{8Kt}$

$$\boxed{f = \left(-\frac{3}{8Kt}\right)^{3/8}}$$



7 . <u>Rapprochement</u> et <u>rotation</u> de plus en plus rapide jusqu'à la fusion des deux astres

8 . On a : $\log f = -\frac{3}{8}\log(-t) + \text{cte}$ d'après la relation de la question 6

$\Rightarrow \log\frac{f_2}{f_1} = -\frac{3}{8}\log\left(\frac{-t_2}{-t_1}\right)$ <u>à vérifier</u> en prenant deux points de la courbe

Prenons les points de la courbe : $t_1 \simeq -10$ s et $f_1 \simeq 50$ Hz
$t_2 \simeq -2$ s et $f_2 \simeq 100$ Hz

On a : $\log\frac{f_2}{f_1} = \log 2 = 0{,}30$ (il faut penser à : $20\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3$ dB en électronique
$\Rightarrow -10\log 2 = -3$)

On a : $\log\left(\frac{-t_2}{-t_1}\right) = \log(2) - \log(10) = 0{,}3 - 1 = -0{,}7$ donc $-\frac{3}{8}\log\left(\frac{-t_2}{-t_1}\right) = \frac{2{,}1}{8} \simeq 0{,}25$

On a 0,30 d'un côté, 0,25 de l'autre. C'est proche donc la relation est à peu près vérifiée.

9. $K = M^\alpha . G^\beta . c^\gamma$

$\frac{df}{dt} = Kf^{11/3} \Rightarrow T^{-2} = [K] . T^{-\frac{11}{3}} \Rightarrow [K] = T^{5/3}$

donc : $T^{5/3} = M^\alpha . (M^{-1}L^3T^{-2})^\beta . (LT^{-1})^\gamma$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5/3 = -2\beta - \gamma \\ 0 = \alpha - \beta \\ 0 = 3\beta + \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5/3 \\ \beta = 5/3 \\ \gamma = -5 \end{cases}$$

donc : $\boxed{K = \frac{(MG)^{5/3}}{c^5}}$

10. On a : $K = -\frac{3}{8tf^{8/3}} \Rightarrow \frac{(MG)^{5/3}}{c^5} = -\frac{3}{8tf^{8/3}} \Rightarrow \frac{MG}{c^3} = \left(-\frac{3}{8tf^{8/3}}\right)^{3/5}$

donc : $M = \frac{c^3}{G}\left(-\frac{3}{8tf^{8/3}}\right)^{3/5}$ on prend le point $t = -2s$ $f \sim 100\,Hz$

$\sim \frac{(3.10^8)^3}{7.10^{-11}}\left(+\frac{3}{16 . 100^{8/3}}\right)^{3/5}$ $\frac{3^3}{7} \sim 4$ $\frac{3}{16} \sim \frac{1}{5}$

$\sim 4.10^{35} . \left(\frac{1}{5}\right)^{3/5} . \frac{1}{100^{8/5}} \sim \frac{1}{10^3}$

soit : $\underline{M \sim 10^{32}\,kg}$

11. $\left|\frac{L}{v_g} - \frac{L}{c}\right| = 2s \Rightarrow \frac{|c - v_g|}{cv_g} L = 2 \Rightarrow \frac{|c - v_g|}{c} = 2\frac{v_g}{L} \simeq 2\frac{c}{L}$

On a : $L = 10^8$ années-lumière $= 10^8 . 3 10^7 . c$

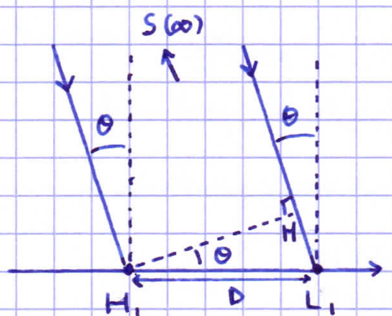
donc : $\frac{|c - v_g|}{c} = \frac{2}{3.10^{15}}$ soit : $\frac{|c-v_g|}{c} \sim \underline{7.10^{-16}}$

C'est très faible. On peut considérer que $\underline{v_g = c}$

12. Au début du signal, la période vaut environ 0,02 s $\Rightarrow$ $\underline{f \sim 50\,Hz}$
Au milieu (vers 0,52 s), la période vaut environ 0,01 s $\Rightarrow$ $\underline{f \sim 100\,Hz}$

C'est en accord avec l'image du haut donnant les fréquences.

13.



$HL_1 = D\sin\theta$ = différence de marche entre les deux signaux

$\Rightarrow$ décalage temporel $\Delta t = \frac{D\sin\theta}{c}$

La mesure de Δt permet de déterminer θ

14. Pour repérer la direction de la source dans le ciel, il faudrait connaître aussi un angle φ autour de la verticale $\Rightarrow$ nécessité d'un troisième détecteur.

• Polytechnique - ESPCi - Physique A - 2018 •

15. Les trois images du haut ressemblent à la figure 1 avec une moins bonne résolution. On peut les associer à la fusion de deux astres.

16. Comme à la question 10 : $M = \frac{c^3}{G}\left(-\frac{3}{8tf^{8/3}}\right)^{3/5}$ (où $t=0$ correspond ici à la fusion soit $t \simeq 0{,}52$ s sur la figure 2)

Pour $t \simeq -0{,}02$ s, on a $f \simeq 50$ Hz

donc : $M \sim 4.10^{35}\left(\frac{3}{8.0{,}02.50^{8/3}}\right)^{3/5} \sim 4.10^{35} \underbrace{\left(\frac{3}{0{,}16}\right)^{3/5}}_{\sim 20^{3/5}} \cdot \underbrace{\frac{1}{50^{8/5}}}_{\sim 50^{1{,}5} \sim 50.\sqrt{50} \sim 50.7 \sim 350}$

$$M \sim \frac{4.10^{35}.20^{3/5}}{350}$$

$$M \sim 10^{34}\ \text{kg}$$

d'où : $\underline{\frac{M_{\text{figure }1}}{M_{\text{figure }2}} \sim 10^{-2}}$

17. L'approximation est meilleure pour le système de la figure 1 car la fréquence varie plus lentement dans le temps.

18. <u>La variation de fréquence Δf</u> sur une période T doit être <u>petite</u> devant <u>la fréquence f</u> pour que l'on puisse considérer que le signal est quasi-périodique : $\Delta f \ll f$

On $\Delta f \simeq \left|\frac{df}{dt}\right| . T = \left|\frac{df}{dt}\right| . \frac{1}{f}$

Donc $\Delta f \ll f$ conduit à la condition : $\boxed{\left|\frac{df}{dt}\right| \ll f^2}$

19. Celte condition donne : $Kf^{\frac{11}{3}} \ll f^2 \Rightarrow \frac{(MG)^{5/3}}{c^5} \ll f^2 . f^{-\frac{11}{3}} = f^{-\frac{5}{3}}$

$$\Rightarrow \frac{MG}{c^3} \ll \frac{1}{f}$$

D'après la question 1 : $MG \sim f^2 d^3$

Donc : $\frac{f^3 d^3}{c^3} \ll 1$

Et enfin : $v \sim \frac{d}{T} = df \Rightarrow \frac{v^3}{c^3} \ll 1 \Rightarrow \boxed{v \ll c}$

Les astres sont <u>non relativistes</u>