Théorème de sommation par paquets.

Soit I un ensemble dénombrable et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille avec $\cdot \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$

$\cdot \forall n \neq m \quad I_n \cap I_m = \emptyset$

① La famille $(x_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ est sommable ssi pour tout n, $(x_i)_{i\in I_n}$ l'est et $\sum \Big(\underbrace{\sum_{i\in I_n} x_i}_{=y_n}\Big)$ c.v.

② Si $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ est sommable alors

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i\in I_n} x_i \Big)$$

démonstrat°

① Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, chaque sous-famille $(x_i)_{i\in I_n}$ est sommable.

De plus : $\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0$

$\forall n \in [\![0;N]\!] \qquad \sum_{i\in I_n} x_i = \sup\Big(\Big\{\sum_{i\in J} x_i \,/\, J \subset I_n, J \text{ fini}\Big\}\Big)$

donc $\exists J_{n,N}$ fini $\quad J_{n,N} \subset I_n$

avec $\Big(\sum_{i\in I_n} x_i\Big) - \frac{\varepsilon}{N+1} \leq \sum_{i\in J_{n,N}} x_i \leq \sum_{i\in I_n} x_i$

ainsi $\bigcup_{n=0}^{N} J_{n,N} = J$ est un ensemble fini (réunion d'un nombre fini d'ensembles finis)

et $\quad \sum_{i\in J} x_i \underset{\uparrow}{=} \sum_{n=0}^{N} \sum_{i\in J_{n,N}} x_i \geqslant \sum_{n=0}^{N} \Big(\Big(\sum_{i\in I_n} x_i\Big) - \frac{\varepsilon}{N+1}\Big)$

$J_{n,N} \cap J_{m,N} \subset I_n \cap I_m = \emptyset$
2 à 2 disjoints

d'où $\quad \sum_{n=0}^{N} y_n - \varepsilon \leq \sum_{i\in J} x_i \leq \sum_{i\in I} x_i$

$\overrightarrow{J \text{ fini} + \text{def } \sum_{i\in I} x_i}$

d'où $\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon > 0 \qquad \sum_{n=0}^{N} y_n \leq \sum_{i\in I} x_i + \varepsilon$

d'où $(\varepsilon \to 0^+) \qquad \sum_{n=0}^{N} y_n \leq \sum_{i\in I} x_i$

et $\sum y_n$ est à termes positifs, on vient de voir que la suite de ses sommes partielles est majorée donc $\boxed{\sum y_n \text{ c.v. et } \sum_{n=0}^{\infty} y_n \le \sum_{i\in I} x_i}$

Réciproquement

<u>Pour tout J partie finie</u> non vide de I,
$\mathcal{P}=\{n\in\mathbb{N} \,/\, I_n\cap J\neq\emptyset\}$ est finie (sinon J contiendrait au moins un élément de chaque I_n donc au moins $1+m$ éléments distincts dans $\bigcup_{n=0}^{m} I_n$ pour tout m (les I_n sont 2 à 2 distincts) ce qui contredit la finitude de J.

Ainsi $$\sum_{i\in J} x_i \underset{\text{2 à 2 disjoints}}{=} \sum_{i\in \bigcup_{n\in\mathcal{P}}(I_n\cap J)} x_i = \sum_{n=0}^{\max\mathcal{P}} \underbrace{\sum_{i\in I_n\cap J} x_i}_{\le y_n}$$

$I_n\cap J$ finie
$(x_i)_{i\in I_n}\in\mathbb{R}_+^{I_n}$
sommable de somme y_n

d'où $$\underline{\sum_{i\in J} x_i} \le \sum_{n=0}^{\max\mathcal{P}} y_n \le \underline{\sum_{n=0}^{\infty} y_n}$$

$\sum y_n$ c.v.
$\forall n \; y_n\ge 0$

On vient de montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ majore $\{\sum_{i\in J} x_i \,/\, J\subset I \ J \text{ fini}\}$ donc la famille de réels positifs $\boxed{(x_i)_{i\in I} \text{ est sommable et } \sum_{i\in I} x_i \le \sum_{n=0}^{\infty} y_n}$

② • $(x_i)_{i\in I}\in(\mathbb{R}^+)^I$ ok c'est ①.

• $(x_i)_{i\in I}\in\mathbb{R}^I$

Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, par comparaison $(x_i^+)_{i\in I}$ et $(x_i^-)_{i\in I}$ aussi ($0\le x_i^{\pm}\le |x_i|$)

d'où via ①: $$\sum_{i\in I} x_i^+ = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i\in I_n} x_i^+\Big)$$
$$\sum_{i\in I} x_i^- = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i\in I_n} x_i^-\Big)$$

$$\Rightarrow \sum_{i\in I} x_i \underset{\text{def}}{=} \sum_{i\in I} x_i^+ - \sum_{i\in I} x_i^- \underset{\text{comb. lin. 2 série c.v.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\underbrace{\sum_{i\in I_n} x_i^+ - \sum_{i\in I_n} x_i^-}_{\overset{\text{def}}{=}\sum_{i\in I_n} x_i}\Big)$$

(car $(x_i)_{i\in I_n}$ sommable)

d'où ok.

• idem Re et Im.