Approximations de fonctions

(démonstrations)

1) Fonctions en escaliers

Structure : l'ensemble des fonctions en escaliers sur le segment $[a;b]$ (avec $a < b$)) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{B}([a;b];F)$ des fonctions bornées de $[a;b]$ dans F.

Démontrons cette propriété par la caractérisation des sous-espaces vectoriels:
• Soit φ dans $\mathcal{E}([a;b];F)$. Il existe $(a_k)_{k=0...n+1}$ une subdivision de $[a;b]$ adaptée à φ : sur chaque $]a_k;a_{k+1}[$, (pour $k=0...n$), φ est constante égale à $c_k \in F$. Ainsi φ prend ses valeurs dans l'ensemble fini $\{c_k; k=0\dots n\} \cup \{\varphi(a_k); k=0\dots n+1\}$, donc c'est une fonction bornée.
Finalement, on a bien l'inclusion $\mathcal{E}([a;b];F) \subset \mathcal{B}([a;b];F)$.
• La fonction nulle $x \in [a;b] \mapsto 0_F$ est bien en escalier car $(a;b)$ est une subdivision de $[a;b]$ adaptée.
• Soit φ et Ψ deux fonctions en escalier sur $[a;b]$, et λ un scalaire.
Considérons $(a_k)_{k=0...n+1}$ et $(b_k)_{k=0...m+1}$ des subdivisions de $[a;b]$ adaptées respectivement à φ et Ψ. Notons $\{c_k; k=0\dots p+1\}$ la réunion $\{a_k; k=\dots n+1\} \cup \{b_k; k=\dots m+1\}$ avec $a=c_0<c_1<\dots<c_{1+p}=b$. Ainsi $(c_k)_{k=0...p+1}$ est d'une part une sur-famille de $(a_k)_{k=0...n+1}$ donc une subdivision de $[a;b]$ adaptée à φ et d'autre part une sur-famille de $(b_k)_{k=0...m+1}$ donc une subdivision adaptée de $[a;b]$ adaptée à Ψ. Donc sur $]c_k;c_{k+1}[$, les fonctions φ et Ψ sont constantes donc $\varphi+\lambda\Psi$ aussi. Finalement $\varphi+\lambda\Psi$ est bien en escalier.

2) Fonctions continues par morceaux

Structure : l'ensemble $\mathcal{C}^0_m([a;b];F)$ des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a;b]$ (avec $a < b$)) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{B}([a;b];F)$.

Démontrons cette propriété par la caractérisation des sous-espaces vectoriels:
• Soit φ dans $\mathcal{C}^0_m([a;b];F)$. Il existe $(a_k)_{k=0...n+1}$ une subdivision de $[a;b]$ adaptée à φ :

$$\forall k=0\dots n, \quad \exists f_k \in \mathcal{C}^0([a_k;a_{k+1}]) \text{ avec } \forall x \in]a_k;a_{k+1}[, \varphi(x)=f_k(x)$$

Pour tout k de 0 à n, la fonction f_k est continue sur le segment $[a_k;a_{k+1}]$ donc y est bornée : il existe $m_k \in \mathbb{R}^+$ avec $\|f_k(x)\| \leqslant m_k$ pour tout x de $[a_k;a_{k+1}]$, donc $\|\varphi(x)\| \leqslant m_k$ pour tout x de $]a_k;a_{k+1}[$.

Ainsi en notant M le maximum de l'ensemble fini $\{m_k; k=0\dots n\} \cup \{\|\varphi(a_k)\|; k=0\dots 1+n\}$, on a bien $\|\varphi(x)\| \leqslant M$ pour tout x de $[a;b]$ et donc l'inclusion $\mathcal{C}^0_m([a;b];F) \subset \mathcal{B}([a;b];F)$.
• La fonction nulle est continue donc continue par morceaux.
• Soit φ et Ψ deux fonctions continues par morceaux sur $[a;b]$, et λ un scalaire.
Considérons $(a_k)_{k=0...n+1}$ et $(b_k)_{k=0...m+1}$ des subdivisions de $[a;b]$ adaptées respectivement à φ et Ψ. Notons $\{c_k; k=0\dots p+1\}$ la réunion $\{a_k; k=\dots n+1\} \cup \{b_k; k=\dots m+1\}$ avec $a=c_0<c_1<\dots<c_{1+p}=b$. Ainsi $(c_k)_{k=0...p+1}$ est d'une part une sur-famille de $(a_k)_{k=0...n+1}$ donc une subdivision de $[a;b]$ adaptée à φ et d'autre part une sur-famille de $(b_k)_{k=0...m+1}$ donc une subdivision adaptée de $[a;b]$ adaptée à Ψ. Donc sur $]c_k;c_{k+1}[$, les fonctions φ et Ψ coïncident avec des fonctions f_k et g_k continues sur $[c_k;c_{k+1}]$, donc $\varphi+\lambda\Psi$ coïncide sur $]c_k;c_{k+1}[$ avec la fonction $f_k+\lambda g_k$ qui est bien continues sur $[c_k;c_{k+1}]$ comme combinaison linéaire de telles fonctions. Finalement $\varphi+\lambda\Psi$ est bien continue par morceaux sur $[a;b]$.

3) Approximations uniformes

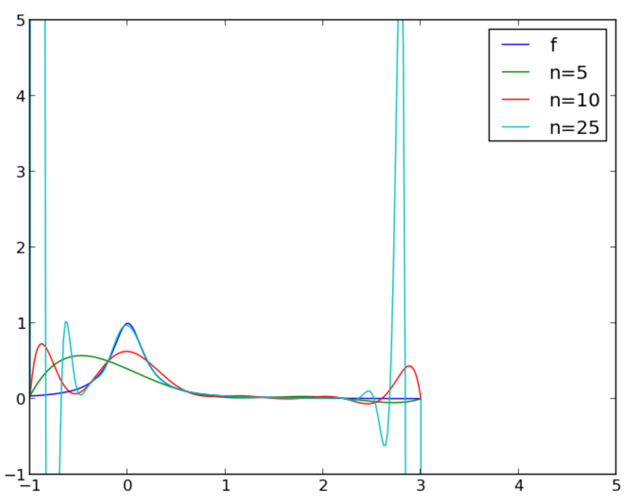
Fonctions en escalier : Soit $a < b$. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}([a;b];F)$ est dense dans $\mathcal{C}^0_m([a;b];F)$ pour la norme N_∞ de la convergence uniforme sur $[a;b]$.

Soit f dans $\mathcal{C}^0_m([a;b];F)$ et $\varepsilon > 0$.
Il existe $(a_k)_{k=0\dots n+1}$ une subdivision de $[a;b]$ adaptée à f :

$$\forall k = 0\dots n, \quad \exists f_k \in \mathcal{C}^0([a_k;a_{k+1}]) \text{ avec } \quad \forall x \in]a_k;a_{k+1}[, f(x) = f_k(x)$$

D'après le théorème de Heine, toute fonction continue sur un segment, y est uniformément continue donc :
$\forall k = 0..n, \ \ \exists \delta_k > 0$ avec $(x;y) \in [a_k;a_{k+1}]$ et $|x-y| \leqslant \delta_k \Longrightarrow \|f_k(x) - f_k(y)\| \leqslant \varepsilon$
A k fixé entre 0 et n, on définit N_k comme la partie entière de $\frac{a_{k+1}-a_k}{\delta_k}$ (il y a donc N_k intervalles entiers de longueur δ_k dans $[a_k;a_{k+1}]$), et on pose $a_{k,r} = a_k + r\delta_k$ pour tout r de 0 à N_k et $a_{k,1+N_k} = a_{k+1}$, ce qui définit une subdivision de $[a_k;a_{k+1}]$. On choisit un point $y_{k,r}$ dans chaque $[a_{k,r};a_{k,r+1}]$ (si $F = \mathbb{R}$, on peut choisir le point où f_k est maximum ou minimum sur le segment $[a_{k,r};a_{k,r+1}]$).
Définissons maintenant une fonction h en escalier sur $[a;b]$ par :
$\forall k = 0\dots n+1, \ \ h(a_k) = f(a_k)$
$\forall k = 0\dots n, \ \ \forall r = 1\dots N_k \ \ h(a_{k,r}) = f_k(a_{k,r})$
$\forall k = 0\dots n, \ \ \forall r = 0\dots N_k \ \ h_{|]a_{k,r};a_{k,r+1}[} = f_k(y_{r,k})$
Par construction, h est bien en escalier sur $[a;b]$ puisque la réunion des $\{a_{k,r}; r = 0\dots 1+N_k\}$ fournit une subdivision de $[a;b]$ adaptée à h.
De plus pour tout x de $[a;b]$,
soit x est un a_k donc $\|h(x) - f(x)\| = \|f(a_k) - f(a_k)\| = 0$
soit x est un $a_{k,r}$ avec r dans $\{1,\dots,N_k\}$, donc $\|h(x) - f(x)\| = \|f_k(a_{k,r}) - f(a_{k,r})\| = 0$ car f et f_k coïncident sur $]a_k;a_{k+1}[$
soit x est dans un $]a_{k,r},a_{k,r+1}[$ donc $\|h(x) - f(x)\| = \|f_k(y_{k,r}) - f_k(x)\| \leqslant \varepsilon$ car $|x - a_{k,r}| \leqslant \delta_k$.
Bref, on a toujours $\|f(x) - h(x)\| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $N_\infty(f-h) \leqslant \varepsilon$ avec h une fonction en escalier.

Contre-exemple : la suites des polynômes de Lagrange associés à une subdivision régulière de $[a;b]$ peut ne pas converger uniformément vers f sur $[a;b]$, où $f \in C^0([a;b];\mathbb{R})$ (cela dépend de f et du segment choisi), comme le montre le tracé suivant obtenu par l'utilisation de Python pour $f : x \mapsto \frac{1}{1+25x^2}$ sur $[-1;3]$.



Programme Python utilisé

```
def PolyLagrange (f,a,b,n):
    """Calcule le polynôme (fonction) de Lagrange pour la subdivision régulière de [a;b]
    de pas (b-a)/n et de valeurs les images de ces points par f"""
    h=(b-a)/n
    def poly(x):
        valeur=0
        for k in range(n+1):
            # calcul de L_k(x)
            prod=1
            for u in range(n+1):
                if u!=k:
                    prod=prod*(x-a-u*h)/((k-u)*h)
            # calcul du polynome
            valeur=valeur+(f(a+k*h))*prod
        return valeur
    return poly

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def dessins(f,a,b,list,p):
    """Dessine avec p valeurs, les graphes de f et des polynômes de Lagrange associés
    à la subdivision régulière de [a;b] de pas (b-a)/n et de valeurs les images de
    ces points par f, pour la liste list de valeurs de n données"""
    segment=np.linspace(a,b,p)
    graphe=np.zeros(p)
    plt.figure(1)
    plt.axis([a,b+2,-1,5]) # pour que labels pas sur tracés
    # graphe de f
    for k in range(p):
        graphe[k]=f(segment[k]) # calcul de l'image
    plt.plot(segment,graphe,label='f')
    plt.draw()
    plt.show()
    # graphes des polynomes
    for n in list:
        g=PolyLagrange(f,a,b,n)
        for k in range(p):
            graphe[k]=g(segment[k]) # calcul de l'image
        plt.plot(segment,graphe,label='n=%s'%n)
        plt.legend()
        plt.draw()
    plt.clf()

def h(x):
    return 1/(1+25*x*x)

>>> dessins(h,-1,3,[5,10,25],200)
```