ENS Lyon. Physique-Chimie. Option PC. 2019

I. Excitation paramétrique d'un pendule simple

1. On pourra supposer le pendule simple si :
   - la masse de la tige est faible devant la masse du point M
   - la longueur ℓ de la tige est grande devant la longueur caractéristique de la masse m

2. Dans R_0 galiléen, on applique la loi scalaire du moment cinétique (LSMC) au pendule {tige sans masse + masse m en M} par rapport à l'axe fixe Ay :

$$\frac{dL(Ay)}{dt} = \mathcal{M}_{ext \to pendule}(Ay)$$

On a : $L(Ay) = \vec{L}(A).\vec{u}_y = (\vec{AM} \wedge m\vec{v}_{M/R_0}).\vec{u}_y = (\ell\vec{m} \wedge m\ell\dot{\theta}\vec{\tau}).\vec{u}_y = m\ell^2\dot{\theta}$

$$\mathcal{M}_{ext \to pendule}(Ay) = \mathcal{M}_{liaison}(Ay) + \mathcal{M}_{poids}(Ay)$$
$$= 0 \text{ (liaison parfaite) } - mg\underbrace{\ell\sin\theta}_{\text{bras de levier du poids}}$$

donc : $m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0}$ avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

3. Pour de petits angles, on a des oscillations sinusoïdales de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

A.N : $T_0 = 0{,}9\,s$

4. On se place dans le référentiel non galiléen R_1 où l'axe Ay est fixe

On ajoute la force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_{A/R_0} = -m\ddot{h}\vec{u}_z$

On peut alors reprendre l'équation de la question 2 en remplaçant g par $g - \ddot{h}$

$\Rightarrow m\ell^2\ddot{\theta} = -m(g-\ddot{h})\ell\sin\theta \Rightarrow \ell\ddot{\theta} = -g(1-\frac{\ddot{h}}{g})\sin\theta$ On pose : $G = \frac{\ddot{h}}{g}$

d'où : $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2(1-G)\sin\theta = 0}$

5. Dans R_0 galiléen, on applique la loi de la quantité de mouvement (LQDM) au pendule :

$$m\vec{a}_{M/R_0} = \vec{F}_{ext \to pendule} = m\vec{g} + \vec{R} \quad \text{donc : } \vec{R} = m(\vec{a}_{M/R_0} - \vec{g})$$

On a : $\vec{OM} = (h + \ell\cos\theta)\vec{u}_z + \ell\sin\theta\,\vec{u}_x$

$$\vec{v}_{M/R_0} = (\dot{h} - \ell\dot{\theta}\sin\theta)\vec{u}_z + \ell\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{u}_x$$

$$\vec{a}_{M/R_0} = (\ddot{h} - \ell\ddot{\theta}\sin\theta - \ell\dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{u}_z + (\ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta)\vec{u}_x$$

donc : $\vec{R} = m\left|\begin{array}{l}\ddot{h} - \ell\ddot{\theta}\sin\theta - \ell\dot{\theta}^2\cos\theta - g\\ \ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta\\ 0\end{array}\right.$ On remplace : $\left\{\begin{array}{l}\ddot{h} \text{ par } Gg \text{ et } \ell \text{ par } \frac{g}{\omega_0^2}\\ \dot{\theta}^2 \text{ par } U\omega_0^2\\ \ddot{\theta} \text{ par } -\omega_0^2(1-G)\sin\theta\end{array}\right.$

$$\vec{R} = m\left|\begin{array}{l}Gg + \frac{g}{\omega_0^2}.\omega_0^2(1-G)\sin^2\theta - \frac{g}{\omega_0^2}U\omega_0^2\cos\theta - g\\ \frac{g}{\omega_0^2}(-\omega_0^2(1-G)\sin\theta)\cos\theta - \frac{g}{\omega_0^2}U\omega_0^2\sin\theta\\ 0\end{array}\right. = mg\left|\begin{array}{l}G-1+(1-G)\sin^2\theta - U\cos\theta\\ -(1-G)\sin\theta\cos\theta - U\sin\theta\\ 0\end{array}\right.$$

$$\vec{R} = mg \left| \begin{array}{l} (1-G)(\sin^2\theta - 1) - U\cos\theta \\ -(1-G)\sin\theta\cos\theta - U\sin\theta \end{array} \right. = mg \left| \begin{array}{l} -(1-G)\cos^2\theta - U\cos\theta \\ -(1-G)\sin\theta\cos\theta - U\sin\theta \\ 0 \end{array} \right.$$

Finalement : $\boxed{\vec{R} = -mg\left[\cos\theta\left((1-G)\cos\theta + U\right)\vec{u}_z + \sin\theta\left((1-G)\cos\theta + U\right)\vec{u}_x\right]}$

6 - $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$ est un infiniment petit d'ordre 1, donc $U = \frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2}$ est d'ordre 2.

On a : $\vec{R} \simeq -mg \left| \begin{array}{l} (1-\frac{\theta^2}{2})\left[(1-G)(1-\frac{\theta^2}{2}) + U\right] \\ \theta\left[(1-G)(1-\frac{\theta^2}{2}) + U\right] \\ 0 \end{array} \right.$ $\quad (1-\frac{\theta^2}{2})^2 \simeq 1-\theta^2$ à l'ordre 2

$\theta.U$ est d'ordre 3 donc négligeable

Il reste : $\boxed{\vec{R} \simeq -mg\left[\left((1-G)(1-\theta^2) + U\right)\vec{u}_z + (1-G)\theta\,\vec{u}_x\right]}$

7 - $P(t) = \vec{R}.\vec{V}_{A/R_0} = \vec{R}.\dot{h}\vec{u}_z$ donc : $\boxed{P(t) = -mg\left[(1-G)(1-\theta^2) + U\right]\dot{h}}$

8 - $P(t) \simeq -mg\left[1-\theta^2 + \frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2}\right]\dot{h}$

$= -mg\left[1 - A^2\sin^2\omega_0 t + A^2\cos^2\omega_0 t\right] a\Omega\cos(\Omega t + \phi)$

$\boxed{P(t) = -mga\Omega\left[1 + A^2\cos 2\omega_0 t\right]\cos(\Omega t + \phi)}$

9 - • $P(t) = -mga\Omega\left[\cos(\Omega t + \phi) + \frac{A^2}{2}\cos((2\omega_0 + \Omega)t + \phi) + \frac{A^2}{2}\cos((2\omega_0 - \Omega)t - \phi)\right]$

Les deux premiers cos ne peuvent pas être constant en moyenne sur $[t, t+T_0]$
Le troisième peut l'être si : $2\omega_0 - \Omega = 0$. La condition est donc : $\underline{k = 2}$

On a alors : $P(t) = -mga\Omega\left[\underbrace{\cos(2\omega_0 t + \phi)}_{=0 \text{ en moyenne}} + \underbrace{\frac{A^2}{2}\cos(4\omega_0 t + \phi)}_{=0 \text{ en moyenne}} + \frac{A^2}{2}\cos\phi\right]$

donc : $P_m = -mga\Omega.\frac{A^2}{2}\cos\phi$ soit : $\boxed{P_m = -mga\omega_0 A^2\cos\phi}$

• P_m maximale si $\cos\phi = -1$ donc : $\underline{\phi = \pi\ [2\pi]}$

• $\boxed{P_m^* = mga\omega_0 A^2}$

10 - Maintenant : $P(t) = -mg\left[(1-G)(1-A^2\sin^2\omega_0 t) + A^2\cos^2\omega_0 t\right] a.2\omega_0.\cos(2\omega_0 t + \phi)$

$P(t) = -mga.2\omega_0\left[1 + A^2\cos 2\omega_0 t - G(1 - A^2\sin^2\omega_0 t)\right]\cos(2\omega_0 t + \phi)$

$= P(t)_{\text{question 8}} + mga.2\omega_0.G(1 - A^2\sin^2\omega_0 t).\cos(2\omega_0 t + \phi)$

$= P(t)_{\text{question 8}} + mga.2\omega_0 G\left(1 - A^2\frac{1-\cos 2\omega_0 t}{2}\right).\cos(2\omega_0 t + \phi)$

$= P(t)_{\text{question 8}} + mga2\omega_0 G\left[(1-\frac{A^2}{2})\cos(2\omega_0 t + \phi) + \frac{A^2}{2}\cos 2\omega_0 t.\cos(2\omega_0 t + \phi)\right]$

$= P(t)_{\text{question 8}} + mga2\omega_0 G\left[(1-\frac{A^2}{2})\cos(2\omega_0 t + \phi) + \frac{A^2}{4}\cos(4\omega_0 t + \phi) + \frac{A^2}{4}\cos\phi\right]$

On : $G = \frac{\ddot{h}}{g} = -\frac{a\,4\omega_0^2 \sin(2\omega_0 t+\phi)}{g}$

$P(t) = P(t)_{\text{question 8}} - 8ma^2\omega_0^3 \sin(2\omega_0 t+\phi)\left[\left(1-\frac{A^2}{2}\right)\cos(2\omega_0 t+\phi) + \frac{A^2}{4}\cos(4\omega_0 t+\phi) + \frac{A^2}{4}\cos\phi\right]$

On a : • $\sin(2\omega_0 t+\phi)\cos(2\omega_0 t+\phi) = \frac{1}{2}\sin(4\omega_0 t+2\phi)$ de valeur moyenne nulle

• $\sin(2\omega_0 t+\phi)\cos(4\omega_0 t+\phi) = \frac{1}{2}\left(\sin(6\omega_0 t+2\phi) - \sin 2\omega_0 t\right)$ de valeur moyenne nulle

• $\sin(2\omega_0 t+\phi)$ de valeur moyenne nulle

Conclusion : Le terme supplémentaire est de valeur moyenne nulle. La puissance moyenne P_m est inchangée

---

11. On calcule tout d'abord l'énergie mécanique moyenne E_m du pendule sur $[t, t+T_0]$

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\vec{v}_{M/R_0}^{\,2} - mg\,z_M$$
$$= \frac{1}{2}m\left[(\dot{h} - \ell\dot{\theta}\sin\theta)^2 + \ell^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right] - mg(h + \ell\cos\theta)$$
$$= \frac{1}{2}m\left[\dot{h}^2 - 2\ell\dot{h}\dot{\theta}\sin\theta + \ell^2\dot{\theta}^2\right] - mgh - mg\ell\cos\theta$$
$$\simeq \frac{1}{2}m\left[\dot{h}^2 - 2\ell\dot{h}\dot{\theta}\theta + \ell^2\dot{\theta}^2\right] - mgh - mg\ell\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right) \quad \text{à l'ordre 2 en } \theta \text{ et } \frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$$

Dans les conditions les plus favorables : $\begin{cases}\phi = \pi \\ \Omega = 2\omega_0\end{cases}$ donc : $\begin{cases} h = -a\sin(2\omega_0 t) \\ \dot{h} = -2a\omega_0\cos(2\omega_0 t)\end{cases}$

On a : $\theta = A(t)\sin\omega_0 t \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{A}(t)\sin\omega_0 t + A(t)\omega_0\cos\omega_0 t$

or : $\left|\frac{\dot{A}}{A\omega_0}\right| \sim \frac{\frac{A}{\tau_A}}{A\omega_0}$ où τ_A est le temps caractéristique des variations de A

$= \frac{1}{\tau_A\omega_0} = \frac{T_0}{\tau_A} \ll 1$ car les variations de A sont lentes

donc : $\dot{\theta} \simeq A\omega_0\cos\omega_0 t$

$$E = \frac{1}{2}m\left[4a^2\omega_0^2\cos^2(2\omega_0 t) + \ell^2A^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t) + 2\ell.2a\omega_0.A\omega_0\cos(2\omega_0 t).\cos(\omega_0 t).\sin(\omega_0 t)\right]$$
$$+ mga\sin(2\omega_0 t) - mg\ell\left(1 - \frac{1}{2}A^2\sin^2\omega_0 t\right)$$

On a : • $\langle\cos^2(2\omega_0 t)\rangle = \frac{1}{2}$

• $\langle\cos^2(\omega_0 t)\rangle = \frac{1}{2}$

• $\langle 4\cos(2\omega_0 t).\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)\rangle = \langle 2\cos(2\omega_0 t).\sin(2\omega_0 t)\rangle = \langle\sin(4\omega_0 t)\rangle = 0$

• $\langle\sin(2\omega_0 t)\rangle = 0$

• $\langle\sin^2(\omega_0 t)\rangle = \frac{1}{2}$

Il reste : $E_m = \langle E\rangle = \frac{1}{2}m\left[2a^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}\ell^2A^2\omega_0^2\right] - mg\ell + \frac{1}{4}mg\ell A^2$

$$= ma^2\omega_0^2 + \frac{1}{4}\ell^2A^2m\frac{g}{\ell} - mg\ell + \frac{1}{4}mg\ell A^2$$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}mg\ell A^2 + ma^2\omega_0^2 - mg\ell}$$

Bilan d'énergie mécanique moyenne entre t et $t+dt$ (avec $dt \gg T_0$) :

$$E_m(t+dt) = E_m(t) + P_m^* \, dt \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = P_m^*$$

$$\Rightarrow mg\ell A \cdot \frac{dA}{dt} = mga\omega_0 A^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} - \frac{a\omega_0}{\ell} A = 0}$$

Solution : $\boxed{A(t) = A(0)\, e^{\frac{t}{\tau_A}}}$ avec : $\boxed{\tau_A = \frac{\ell}{a\omega_0}}$ d'où : $\boxed{\frac{T_0}{\tau_A} = 2\pi \frac{a}{\ell}}$

12. On utilise deux points de la courbe. Par exemple : $A(16T_0) = A(0)\exp(16\frac{T_0}{\tau_A}) = 0{,}05$

$$A(28T_0) = A(0)\exp(28\frac{T_0}{\tau_A}) = 0{,}2$$

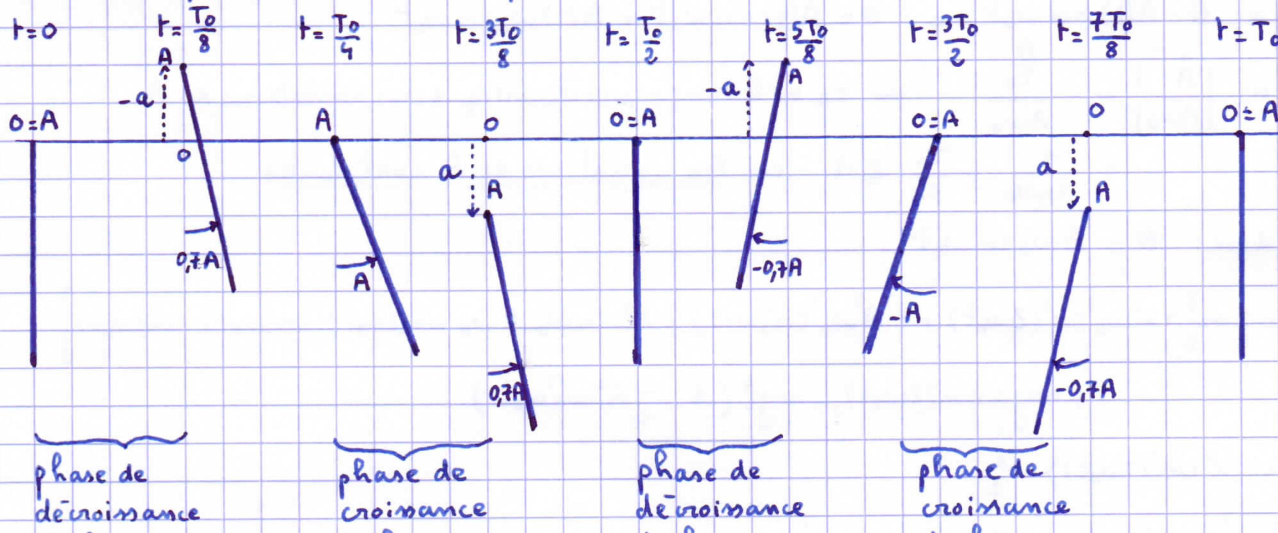
$$\Rightarrow \frac{e^{28\frac{T_0}{\tau_A}}}{e^{16\frac{T_0}{\tau_A}}} = \frac{0{,}2}{0{,}05} \Rightarrow e^{12\frac{T_0}{\tau_A}} = 4 \Rightarrow 12\frac{T_0}{\tau_A} = \ln 4 \Rightarrow \underline{\frac{T_0}{\tau_A} \simeq 0{,}1}$$

13. L'hypothèse $T_0 \ll \tau_A$ est juste vérifiée

14. L'amplification repose sur la condition $\Omega = 2\omega_0$.

Au voisinage de la résonance, les oscillations ne sont plus de faible amplitude.
La période propre n'est plus égale à T_0 mais supérieure.
La condition $\Omega = 2\omega_0$ n'est plus vérifiée, l'amplification cesse et l'amplitude décroît.

15. On représente l'évolution du pendule sur une période, avec : $h = -a\sin(2\omega_0 t)$ et $\theta = A\sin\omega_0 t$



phase de décroissance de h $\Leftrightarrow$ corde raccourcie

phase de croissance de h $\Leftrightarrow$ corde rallongée

phase de décroissance de h $\Leftrightarrow$ corde raccourcie

phase de croissance de h $\Leftrightarrow$ corde rallongée

En résumé : - il faut raccourcir la corde quand le pendule est à la verticale ($\theta = 0$)
- il faut rallonger la corde quand le pendule a son élongation maximale ($|\theta| = A$)

II. Stabilisation dynamique : pendule inversé

16. figure de gauche : CI_1 car $\theta(0) \simeq 0{,}4\pi$. Le pendule oscille autour de $\theta = 0$
figure de droite : CI_2 car $\theta(0) = 0{,}6\pi$. Le pendule oscille autour de $\theta = \pi$

17. On compte environ 17 petites oscillations dans une période T_0. Donc : $\boxed{T_{ex} = \frac{T_0}{17}}$
A.N : $T_{ex} = 50\,ms$

18. A l'équilibre ($\ddot{\theta} = 0$), l'équation (6) devient : $\omega_0^2(1 + G_0 \sin\Psi)\sin\theta = 0$
Elle est vérifiée par $\theta = \pi$
$\theta = \pi$ est donc une position d'équilibre du pendule et on peut envisager des oscillations autour de celle-ci.

19. D'après la question 4, le moment résultant en A des forces est : $\Gamma = -m(g - \ddot{h})\,l \sin\theta$

Soit : $\Gamma = -ml(g + a\Omega^2 \sin\Psi)\sin(\theta_0 + \varepsilon_1 \sin\Psi)$ avec : $\theta = \theta_0 + \theta_1 = \theta_0 + \varepsilon_1 \sin\Psi$

$$= -ml(g + a\Omega^2\sin\Psi)\left[\sin\theta_0 . \cos(\varepsilon_1\sin\Psi) + \sin(\varepsilon_1 \sin\Psi).\cos\theta_0\right]$$

$$\simeq -ml(g + G_0 g \sin\Psi)\left[\sin\theta_0 + \varepsilon_1 \sin\Psi . \cos\theta_0\right]$$ à l'ordre 1 en ε_1

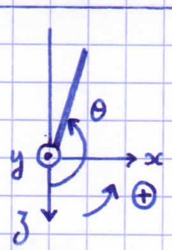
Le moment algébrique moyen est : $\Gamma(\theta_0) = \dfrac{\Gamma(\Psi = -\frac{\pi}{2}) + \Gamma(\Psi = \frac{\pi}{2})}{2}$

Soit : $\Gamma(\theta_0) = \dfrac{-mgl(1-G_0)[\sin\theta_0 - \varepsilon_1\cos\theta_0] - mgl(1+G_0)[\sin\theta_0 + \varepsilon_1\cos\theta_0]}{2}$

$$= -\frac{mgl}{2}\left[\sin\theta_0 - \cancel{\varepsilon_1\cos\theta_0} - \cancel{G_0\sin\theta_0} + G_0\varepsilon_1\cos\theta_0 + \sin\theta_0 + \cancel{\varepsilon_1\cos\theta_0} + \cancel{G_0\sin\theta_0} + \varepsilon_1 G_0 \cos\theta_0\right]$$

$$= -mgl(\sin\theta_0 + \varepsilon_1 G_0 \cos\theta_0)$$

or : $g = l\omega_0^2$ donc : $\boxed{\Gamma(\theta_0) = -\Gamma^*(\sin\theta_0 + \varepsilon_1 G_0\cos\theta_0)}$

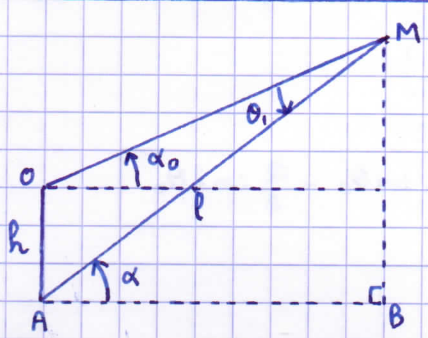
20. 

Pour $\theta_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ le poids tend à faire tourner le pendule dans le sens négatif.
Pour contrebalancer l'effet du poids, il faut que le moment algébrique moyen soit > 0 :
$\Gamma(\theta_0) > 0 \Rightarrow \boxed{\sin\theta_0 + \varepsilon_1 G_0 \cos\theta_0 < 0}$

21. Pour avoir des oscillations, il faut : $\Gamma(\theta_0) > 0$ sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ et $\Gamma(\theta_0) < 0$ sur $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$

Sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$: $\sin\theta_0 + \varepsilon_1 G_0 \cos\theta_0 < 0$ avec $\sin\theta_0 > 0$ et $\cos\theta_0 < 0$ $\Rightarrow$ $\varepsilon_1 > 0$

Sur $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$: $\sin\theta_0 + \varepsilon_1 G_0 \cos\theta_0 > 0$ avec $\sin\theta_0 < 0$ et $\cos\theta_0 < 0$ $\Rightarrow$ $\varepsilon_1 < 0$

22. 

On a : $\cos\alpha = \dfrac{AB}{l}$ et $\cos\alpha_0 = \dfrac{AB}{OM}$

$\Rightarrow l\cos\alpha = OM\cos\alpha_0$
$l\cos(\alpha_0 + \theta_1) = OM\cos\alpha_0$

$\Rightarrow l[\cos\alpha_0\cos\theta_1 - \sin\alpha_0\sin\theta_1] = OM\cos\alpha_0$

$\Rightarrow l\cos\alpha_0 - \theta_1 l\sin\alpha_0 = OM\cos\alpha_0$ car $|\theta_1| \ll 1$

On calcule OM : $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} \rightarrow OM^2 = OA^2 + AM^2 + 2\vec{OA}.\vec{AM}$

$$= h^2 + \ell^2 - 2h\ell\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$
$$= \ell^2\left(1 - 2\frac{h}{\ell}\sin\alpha + \frac{\ell^2}{h^2}\right)^2$$

$$\rightarrow OM \simeq \ell\left(1 - \frac{h}{\ell}\sin\alpha\right)$$
$$\simeq \ell\left(1 - \frac{h}{\ell}\sin\alpha_0\right) \text{ au premier ordre en } \frac{h}{\ell}$$

donc : $\cancel{\ell\cos\alpha_0} - \theta_1\ell\sin\alpha_0 = (\cancel{\ell} - h\sin\alpha_0)\cos\alpha_0$

$$\theta_1\ell\cancel{\sin\alpha_0} = a\sin\Psi\cancel{\sin\alpha_0}\cos\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\theta_1 = \frac{a}{\ell}\sin\Psi\sin\theta_0}$$

23 . (6) $\Rightarrow \ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2(1 + G_0\sin\Psi)\sin(\theta_0 + \theta_1) = 0$

$$\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2(1 + G_0\sin\Psi)[\sin\theta_0 . \cos\theta_1 + \sin\theta_1\cos\theta_0] = 0$$

$$\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2(1 + G_0\sin\Psi)(\sin\theta_0 + \theta_1\cos\theta_0) = 0 \qquad (|\theta_1| \ll 1)$$

$$\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2(1 + G_0\sin\Psi)\left(\sin\theta_0 + \frac{a}{\ell}\sin\Psi\sin\theta_0\cos\theta_0\right) = 0$$

$$\ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2(1 + G_0\sin\Psi)\sin\theta_0 + \omega_0^2(1 + G_0\sin\Psi)\frac{a}{2\ell}\sin\Psi\sin 2\theta_0 = 0$$

on calcule : $\ddot{\theta}_1 = \frac{a}{\ell}\left[\ddot{\theta}_0\cos\theta_0\sin\Psi - \dot{\theta}_0^2\sin\theta_0\sin\Psi + 2\Omega\dot{\theta}_0\cos\theta_0\cos\Psi - \Omega^2\sin\theta_0\sin\Psi\right]$

On calcule maintenant les moyennes temporelles sur $T_{ex} = \frac{2\pi}{\Omega}$ avec : $\begin{cases}\Psi = \Omega t + \phi \\ \theta_0 \text{ figé}\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}\langle\sin\Psi\rangle = 0 \quad \text{et } \langle\cos\Psi\rangle = 0 \\ \langle\sin^2\Psi\rangle = \frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \langle\ddot{\theta}_1\rangle = 0$

il reste : $\ddot{\theta}_0 + \omega_0^2\sin\theta_0 + \omega_0^2 G_0\frac{a}{4\ell}\sin 2\theta_0 = 0$

$$\boxed{\ddot{\theta}_0 + \omega_0^2(\sin\theta_0 + Q\sin 2\theta_0) = 0} \text{ avec : } \boxed{Q = \frac{G_0 a}{4\ell} = \frac{1}{4}\left(\frac{a}{\ell}\right)^2\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}$$

24 . Cette équation redonne celle de la question 2 pour $Q = 0$, i.e $\Omega = 0$.

25 . (9). $\dot{\theta}_0 \Rightarrow \dot{\theta}_0\ddot{\theta}_0 + \omega_0^2(\dot{\theta}_0\sin\theta_0 + Q\dot{\theta}_0\sin 2\theta_0) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} - \omega_0^2\cos\theta_0 - \omega_0^2 Q\frac{\cos 2\theta_0}{2} = \text{cste}$$

on multiplie par $m\ell^2$ pour faire apparaître l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$

donc : $\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - m\ell^2\omega_0^2\left(\cos\theta_0 + \frac{1}{2}Q\cos 2\theta_0\right) = \text{cste}$

$\Rightarrow$ <u>énergie potentielle effective</u> : $E_{eff} = -m\ell^2\omega_0^2\left(\cos\theta_0 + \frac{1}{2}Q\cos 2\theta_0\right) + \text{cste}$

On veut $E_{eff} = 0$ pour $\theta_0 = 0$ et $Q = 0 \Rightarrow 0 = -m\ell^2\omega_0^2 + \text{cste} \Rightarrow \text{cte} = m\ell^2\omega_0^2$

donc : $\boxed{E_{eff} = m\ell^2\omega_0^2\left[1 - \cos\theta_0 - \frac{Q}{2}\cos 2\theta_0\right]}$

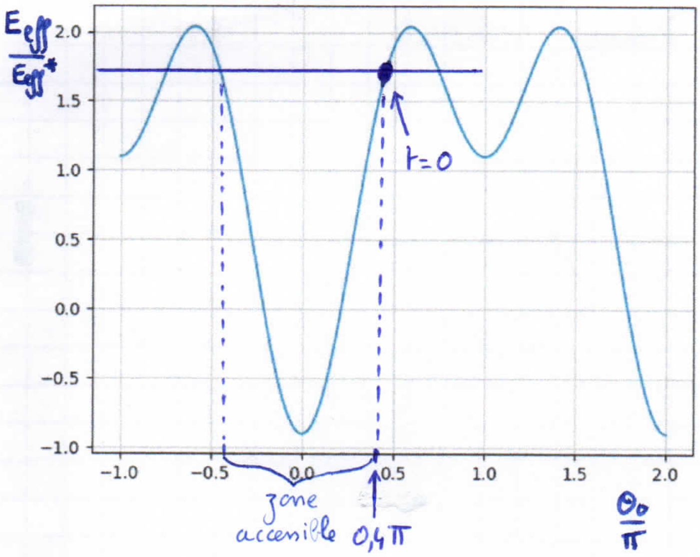
On a donc : $\boxed{E_{eff}^* = m\ell^2\omega_0^2}$ et $\boxed{f(\theta_0) = 1 - \cos\theta_0 - \frac{Q}{2}\cos 2\theta_0}$

26 . <u>Conservation de l'énergie mécanique</u> :

$E_c + E_{eff} = cste = E$

$\Rightarrow \quad E_c = E - E_{eff} > 0$

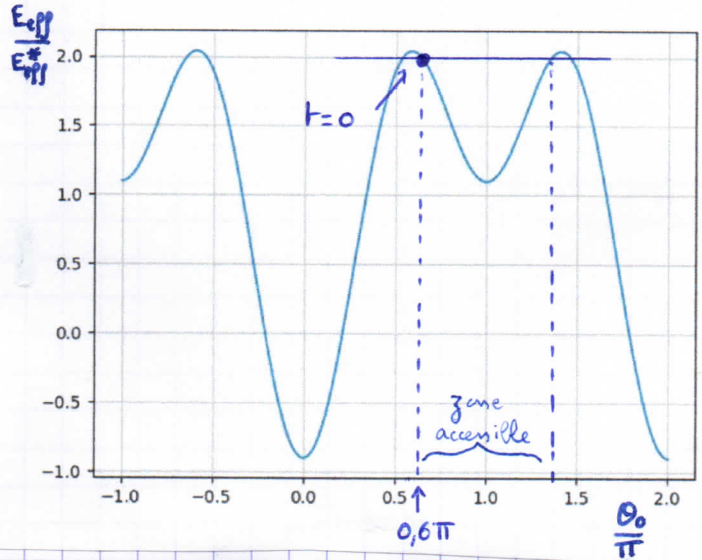
<u>On trace la droite horizontale associée à l'énergie mécanique constante E</u>
Les <u>valeurs de θ_0 accessibles</u> sont celles pour lesquelles la courbe $E_{eff}(\theta_0)$ est située <u>sous</u> cette droite.



<u>figure 3 gauche</u> :

$$E = E_c(t=0) + E_{eff}(t=0)$$
$$= 0 + E_{eff}(\theta_0 = 0{,}4\pi)$$
$$= E_{eff}^* \, f(0{,}4\pi)$$

Le tracé de $\frac{E}{E_{eff}^*} = f(0{,}4\pi)$ montre que le pendule oscille autour de $\theta_0 = 0$



<u>figure 3 droite</u> :

$$E = E_{eff}^* \cdot f(0{,}6\pi)$$

Le tracé de $\frac{E}{E_{eff}^*} = f(0{,}6\pi)$ montre que le pendule oscille autour de $\theta_0 = \pi$

27 . <u>L'approximation parabolique d'un puits de potentiel</u> donne :

$$E_{eff}(\theta_0) = E_{eff}(\theta_{0eq}) + \frac{1}{2}(\theta_0 - \theta_{0eq})^2 \left(\frac{d^2 E_{eff}}{d\theta_0^2}\right)_{\theta_{0eq}}$$

On a l'équivalent d'un ressort de raideur apparente : $k = \left(\frac{d^2 E_{eff}}{d\theta_0^2}\right)_{\theta_{0eq}}$

D'où une <u>période d'oscillation</u> : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Le puits autour de $\theta_0 = 0$ est plus "pointu" que le puits autour de $\theta_0 = \pi$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2 E_{eff}}{d\theta_0^2}\right)_{\theta_0 = 0} > \left(\frac{d^2 E_{eff}}{d\theta_0^2}\right)_{\theta_0 = \pi} \Rightarrow k(\theta_0 = 0) > k(\theta_0 = \pi) \Rightarrow \boxed{T_0(\theta_0 = 0) < T_0(\theta_0 = \pi)}$$

28 . Pour observer des oscillations autour de $\theta_0 = \pi$, il faut que : $\left(\frac{d^2 E_{eff}}{d\theta_0^2}\right)_{\theta_0 = \pi} > 0$

On calcule : $\frac{d^2 E_{eff}}{d\theta_0^2} = m\ell^2\omega_0^2\left[\cos\theta_0 + 2Q\cos(2\theta_0)\right]$

$$\left(\frac{d^2 E_{eff}}{d\theta_0^2}\right)_{\theta_0 = \pi} = m\ell^2\omega_0^2\left[-1 + 2Q\right]$$

$$\left(\frac{d^2 E_{eff}}{d\theta_0^2}\right)_{\theta_0 = \pi} > 0 \Rightarrow \boxed{Q > Q_c = \frac{1}{2}}$$

29. On lit sur la courbe : $f(\theta_0 = 0) = -0{,}9$
On a par ailleurs : $f(\theta_0 = 0) = -\frac{Q}{2}$ D'où : $\underline{Q = 1{,}8}$

La condition $Q > Q_c = 0{,}5$ est vérifiée.

30. On repart de $\ddot{\theta}_0 + \omega_0^2(\sin\theta_0 + Q\sin 2\theta_0) = 0$

$\underline{\text{Autour de } \theta_{eq_0} = 0}$: $\ddot{\theta}_0 + \omega_0^2(1+2Q)\theta_0 = 0$ en linéarisant

d'où : $\boxed{\omega_\ell^* = \omega_0\sqrt{1+2Q}}$

Autour de $\theta_{eq_0} = \pi$: on pose $\theta_0 = \pi + u$ $|u| \ll \pi$

$\ddot{u} + \omega_0^2(\sin(\pi+u) + Q\sin(2\pi+2u)) = 0$

$\ddot{u} + \omega_0^2(-1+2Q)u = 0$

d'où : $\boxed{\omega_h^* = \omega_0\sqrt{2Q-1}}$

Si Q est trop grand, l'hypothèse : $\Omega \gg \omega_\ell^*$ ou ω_h^* est remise en cause

31. ϕ intervient dans $\sin\psi = \sin(\Omega t + \phi)$
La démarche consistant à raisonner en moyenne temporelle sur $T_{exc} = \frac{2\pi}{\Omega}$ fait disparaître ϕ donc ne permet pas d'étudier son influence.