L'application $f : (r;\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi;\pi[\mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta) \in \mathcal{U}$ est une bijection pour $\mathcal{U}$ l'ouvert $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite de l'axe des réels négatifs ou nuls, et f est bien de classe C^1 par théorème opératoire. Qu'en est-il de sa réciproque ?

Soit $(x;y) \in \mathcal{U}$ et $(r;\theta) = f^{-1}(x;y)$ i.e. $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\cos(\theta) = \dfrac{x}{r}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{y}{r}$.
Donc $2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{x}{r} + 1$ et $2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{y}{r}$ (*).
Comme $\alpha = \dfrac{\theta}{2}$ est dans $]-\pi/2;\pi/2[$, on a $\alpha = \arctan(\tan(\alpha))$
donc $\theta = 2\arctan\left(\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right) = 2\arctan\left(\dfrac{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2\cos^2(\alpha)}\right) \overset{(*)}{=} 2\arctan\left(\dfrac{y}{r+x}\right)$
Ainsi $\boxed{f^{-1} : (x;y) \in \mathcal{U} \mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}\ ;\ 2\arctan\left(\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi;\pi[}$ est bien de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ par théorèmes opératoires.