Compléments sur la topologie relative à une partie (d'un espace vectoriel).

I Espaces métriques

définitions:

. Soit A un ensemble non vide.
Une distance sur A est une fonction $d : A \times A \to \mathbb{R}_+$ vérifiant:

- . la séparation : $\forall (x;y) \in A^2 \quad d(x;y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- . la symétrie : $\forall (x;y) \in A^2 \quad d(x;y) = d(y;x)$
- . l'inégalité triangulaire : $\forall (x;y;z) \in A^3$
$$d(x;z) \leq d(x;y) + d(y;z)$$

. Un espace métrique est un ensemble muni d'une distance

remarque : si $[E, \|\cdot\|]$ est un espace vectoriel normé alors si $A \neq \emptyset$ est une partie de E, $d : (x;y) \in A^2 \mapsto \|y - x\|$ est une distance sur A.

inégalité triangulaire renversée :

Dans un espace métrique $[A;d]$, on a:
$$\forall (x;y;z) \in A^3 \quad |d(x;y) - d(y;z)| \leq d(x;z)$$

dem : $d(x;y) \leq d(x;z) + \underbrace{d(z;y)}_{= d(y;z) \text{ (symétrie)}}$ (inégalité triangulaire)

donc $\quad d(x;y) - d(y;z) \leq d(x;z)$ (*)

et $\quad d(z;y) - d(y;x) \leq \underbrace{d(z;x)}_{\substack{= d(x;z) \\ \text{par symétrie}}}$ (*) en échangeant les rôles de x et z

donc $\quad |d(x;y) - d(y;z)| \leq d(x;z)$

vocabulaire : soit $[A, d]$ un espace métrique. On définit:

- la boule ouverte de centre $\omega \in A$ et de rayon $r \geq 0$
$$B_o(\omega; r) = \{x \in A \mid d(\omega;x) < r\}$$
- la boule fermée de centre $\omega \in A$ et de rayon $r \geq 0$
$$B_f(\omega; r) = \{x \in A \mid d(\omega;x) \leq r\}$$

__remarque__ : par analogie avec le cadre d'un espace vectoriel normé, on peut définir les notions de fonctions lipschitziennes, distances équivalentes, suites convergentes, voisinages, ouverts, fermés (pour ces notions, on a utilisé que la distance entre points, pas vraiment la notion de normes)

II Topologie relative à une partie

Soit $[E, \|.\|]$ un espace vectoriel normé, ou plus généralement $[E, d]$ un espace métrique.
On fixe $A \neq \emptyset$ une partie de E et note d_A la distance induite par d sur A ie $d_A = d_{|A\times A} : (x;y) \in A^2 \mapsto d(x;y)$ ($= \|x-y\|$ si E evn).

Alors . un voisinage de $a \in A$ relatif à A est un voisinage de $a \in A$ pour l'espace métrique $[A, d_A]$.
. un ouvert (resp. fermé) relatif à A est exactement un ouvert (resp. fermé) pour l'espace métrique $[A; d_A]$

__démonstration__ :

(1). $\forall a \in A$ $\forall r > 0$

$$B_o^{d_A}(a;r) = \{x \in A \mid d_A(x;a) < r\}$$
$$= \{x \in A \mid d(x;a) < r\}$$
$$= A \cap B_o(a;r)$$

. Soit $W \subset A$, $a \in A$

W voisinage de $a \in A$ relatif à A

$\iff$

$\exists W'$ W' voisinage de a avec $W = A \cap W'$

$\iff$

$\exists W' \in \mathcal{P}(E)$ $\exists r' > 0$ tq $B_o(a;r') \subset W'$ (voisinage)
avec $W = A \cap W'$

$\iff$ ($r = r'$) ($W' = B_o(a;r) \cup W$ et $r' = r$)

$\exists r > 0$ tq $B_o^{d_A}(a;r) \subset W$

$\iff$

W voisinage de a dans $[A; d_A]$

- $\tilde{\Theta} \in \mathcal{P}(A)$

$\tilde{\Theta}$ ouvert relatif à A

$\iff$

$\exists \Theta$ ouvert de E tq $\tilde{\Theta} = \Theta \cap A$

$\iff$

$\exists \Theta \in \mathcal{P}(E)$ tq $\begin{cases} \forall x \in \Theta \quad \Theta \in \mathcal{V}(x) \\ \tilde{\Theta} = \Theta \cap A \end{cases}$

$\iff$

$\exists \Theta \in \mathcal{P}(E)$ tq $\begin{cases} \forall x \in \Theta \quad \exists r_x > 0 \text{ tq } B_\Theta(x; r_x) \subset \Theta \\ \tilde{\Theta} = \Theta \cap A \end{cases}$

(*) $\uparrow$ $\iff$ $r'_y = r_y$ et (1)

$\forall y \in \tilde{\Theta} \quad \exists r'_y > 0$ tq $B_\Theta^{d_A}(y; r'_y) \subset \tilde{\Theta}$

$\iff$ $\tilde{\Theta}$ ouvert pour $[A; d_A]$.

(*) $\Theta = \bigcup_{y \in \tilde{\Theta}} B_\Theta(y; r'_y)$ → ouvert comme réunion d'ouverts

→ $\Theta \cap A = \bigcup_{y \in \tilde{\Theta}} \underbrace{(A \cap B_\Theta(y; r'_y))}_{= B_\Theta^{d_A}(y; r'_y)}$

donc $\Theta \cap A \subset \tilde{\Theta}$

et $\tilde{\Theta} \subset \Theta$ (car $r'_y > 0$ donc $y \in B_\Theta(y; r'_y)$)

or $\tilde{\Theta} \subset A$ (hyp.)

d'où $\Theta \cap A = \tilde{\Theta}$ par double inclusion

- $F \subset A$

F fermé relatif à A $\iff$ $A \setminus F$ ouvert relatif à A

$\iff$ $A \setminus F$ ouvert pour $[A; d_A]$

$\overset{\text{déf}}{\iff}$ $C_A(A \setminus F) \underset{F \subset A}{=} F$ fermé pour $[A; d_A]$