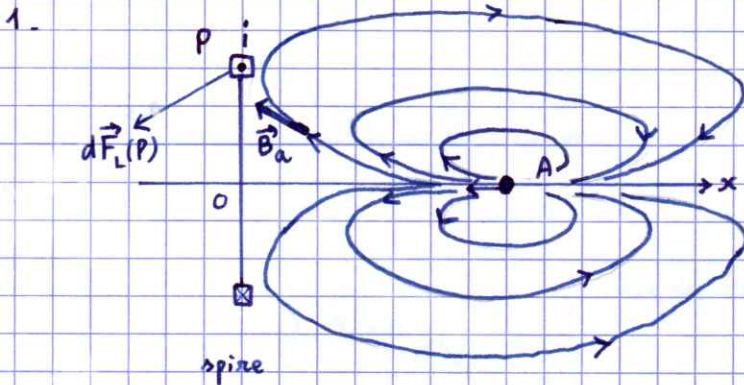
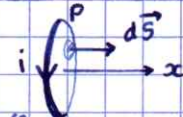


① Interaction électromécanique entre un aimant et une spire

1.1 Analyse qualitative de l'interaction



2. La spire est orientée par \vec{e}_x donc le sens d'orientation de i est :

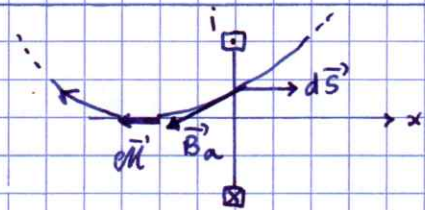


L'aimant s'approche \Rightarrow le flux magnétique à travers la spire $\iint \vec{B}_a \cdot d\vec{S} < 0$ va devenir de plus en plus < 0 car il croît en valeur absolue
 $\Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} < 0$
 \Rightarrow force électromotrice induite : $e = -\frac{d\Phi}{dt} > 0$
 \Rightarrow courant $i > 0$

3. Force de Laplace élémentaire sur un élément de spire $d\vec{l}(P)$: $d\vec{F}_L(P) = i d\vec{l}(P) \wedge \vec{B}_a(P)$

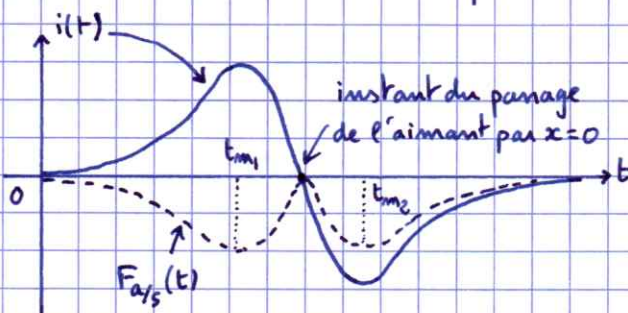
La résultante de ces forces élémentaires sera, par symétrie, selon l'axe Ox , dans le sens < 0 . L'aimant tend donc à repousser la spire. D'après le principe des actions réciproques, la spire exerce une force sur l'aimant qui tend à le freiner.

4. Quand l'aimant est à gauche, le flux magnétique est toujours < 0 mais de moins en moins < 0 car il croît en valeur absolue
 $\Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} > 0$
 $\Rightarrow e = -\frac{d\Phi}{dt} < 0 \Rightarrow$ courant $i < 0$

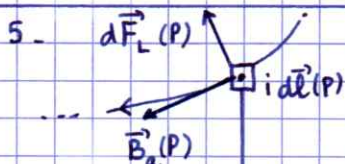


Le flux est maximal en valeur absolue quand l'aimant est en $O \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = 0 \Rightarrow i = 0$ pour $x = 0$

Donc :



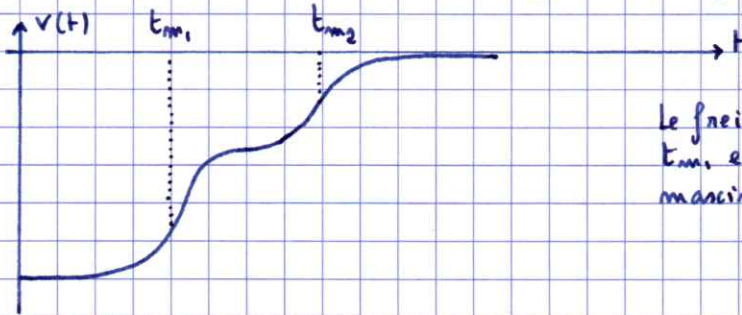
$i(0) = 0$ car l'aimant est très loin du côté droit pour $t = 0$



$$d\vec{F}(P) = i d\vec{l}(P) \wedge \vec{B}_a(P)$$

L'orientation de $\vec{B}_a(P)$ quand l'aimant est à gauche et celle de $i d\vec{l}(P)$ avec $i < 0$ donne une force de Laplace encore selon $-\vec{e}_x$

6. L'aimant arrive avec une vitesse < 0 à $t=0$
- L'aimant est repoussé par la spire quand il est à droite $\Rightarrow |v|$ diminue
 - L'aimant continue son mouvement et passe du côté gauche de la spire. Il est maintenant attiré par la spire donc sa vitesse continue à décroître en valeur absolue.
 - Sa vitesse va finir par s'annuler sous l'effet de cette force de freinage (loi de Lenz)

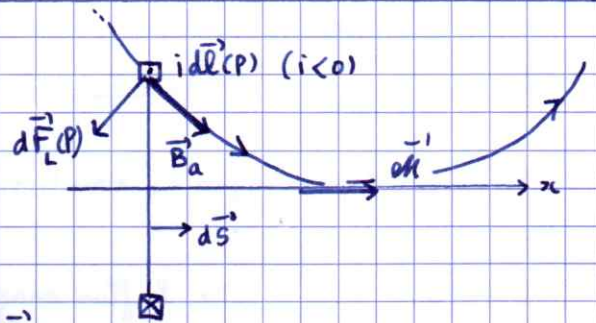


Le freinage est maximal aux instants t_{m1} et t_{m2} quand la force $F_{A/S}$ est maximale en valeur absolue.

7. Cette fois le flux magnétique $\Phi = \int_{\text{spire}} \vec{B}_a \cdot d\vec{S}$ est > 0
 Il croît quand \vec{e}_x s'approche
 $\Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} > 0$

$$\Rightarrow e = -\frac{d\Phi}{dt} < 0 \Rightarrow i < 0$$

$d\vec{F}_L(P) = i d\vec{l}(P) \wedge \vec{B}_a(P)$ est encore dirigée vers la gauche. D'après le principe des actions réciproques, la force exercée par la spire sur l'aimant est selon $+\vec{e}_x$. L'aimant est encore freiné. Son mouvement est inchangé.



8. L'aimant est freiné donc il perd de l'énergie cinétique.
 Cette énergie se retrouve sous forme d'effet Joule dans la résistance de la spire.

1.2 Etude analytique de l'interaction

9. On a: $\vec{m} = -M \cdot \frac{4\pi}{3} \left(\frac{D}{2}\right)^3 \vec{e}_x = -\frac{M\pi D^3}{6} \vec{e}_x$ puis $\vec{m} \cdot \vec{e}_n = \frac{M\pi D^3}{6} \cos\varphi$

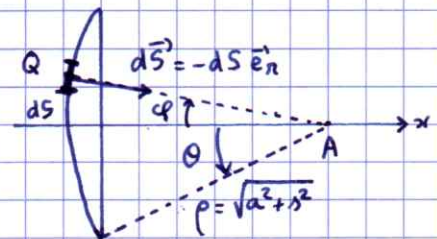
Donc: $\vec{B}_a(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[3 \cdot \frac{M\pi D^3}{6} \cos\varphi \vec{e}_n + \frac{M\pi D^3}{6} \vec{e}_x \right]$ or $\mu_0 M = B^*$

D'où: $\vec{B}_a(Q) = \frac{B^* D^3}{8\pi^3} \left(\cos\varphi \vec{e}_n + \frac{1}{3} \vec{e}_x \right)$

10. Pour calculer le flux de \vec{B}_a à travers la spire, on choisit la calotte sphérique de rayon constant $\rho = \sqrt{a^2 + s^2}$ s'appuyant sur la spire.

On a: $d\vec{S} = -\rho^2 \sin\varphi d\varphi d\beta \vec{e}_n$

Donc:
$$\begin{aligned} \Phi_{A/S} &= \iint_{\text{spire}} \vec{B}_a(Q) \cdot d\vec{S}(Q) \\ &= - \int_0^\theta \int_0^{2\pi} \frac{B^* D^3}{8\rho^3} \left(\cos\varphi \vec{e}_n + \frac{1}{3} \vec{e}_x \right) \rho^2 \sin\varphi d\varphi d\beta \vec{e}_n \\ &= - \frac{B^* D^3}{8\rho} \int_0^\theta d\beta \int_0^\theta \left(\cos\varphi - \frac{1}{3} \cos\varphi \right) \sin\varphi d\varphi \\ &= - \frac{B^* D^3}{8\rho} \cdot 2\pi \cdot \int_0^\theta \frac{2}{3} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \\ &= - \frac{B^* D^3}{\sqrt{a^2 + s^2}} \frac{\pi}{6} \left[\frac{\sin^2\varphi}{2} \right]_0^\theta \\ &= - \frac{B^* D^3}{\sqrt{a^2 + s^2}} \frac{\pi}{12} \sin^2\theta \quad \text{avec } \sin\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + s^2}} \end{aligned}$$



donc: $\Phi_{a/s} = - \frac{B^* D^3}{(a^2 + s^2)^{3/2}} \frac{a^2 \pi}{12} = - \frac{B^* D^3}{(1 + X^2)^{3/2}} \frac{\pi}{12a}$ avec $X = \frac{s}{a}$

finalement: $\Phi_{a/s} = \Phi_0 F(X)$ avec: $\Phi_0 = - \frac{\pi B^* D^3}{12a}$ et $F(X) = \frac{1}{(1 + X^2)^{3/2}}$

11. L'inductance L est à l'origine d'un temps caractéristique d'établissement du courant $\tau = \frac{L}{R}$. On pourra négliger l'effet de L si ce temps est très petit devant τ_i : $\frac{L}{R} \ll \tau_i$

Donc: $L \ll R \tau_i$

13. La force de Laplace élémentaire sur $d\vec{l}(P)$ est: $d\vec{F}_L(P) = i d\vec{l}(P) \wedge \vec{B}_a(P)$
 $= i a d\beta \vec{e}_z \wedge \left[\frac{B^* D^3}{8\rho^3} (\cos\theta \vec{e}_\rho + \frac{1}{3} \vec{e}_x) \right]$

soit: $d\vec{F}_L(P) = i a d\beta \vec{e}_z \wedge \frac{B^* D^3}{8\rho^3} \left[\cos\theta (-\cos\theta \vec{e}_\rho + \sin\theta \vec{e}_\theta) + \frac{1}{3} \vec{e}_x \right]$
 $= i a d\beta \frac{B^* D^3}{8\rho^3} \left[-\cos\theta \sin\theta \vec{e}_\theta + \text{composante selon } \vec{e}_x \right]$

Par symétrie, la force résultante est selon Ox. On ne garde que la composante selon Ox de $d\vec{F}_L(P)$ puis on intègre sur toute la spire en faisant varier β de 0 à 2π :

$\vec{F}_{a/s} = \int_0^{2\pi} -i a d\beta \frac{B^* D^3}{8\rho^3} \cos\theta \sin\theta \vec{e}_x$ avec: $\cos\theta = \frac{s}{\rho}$ et $\sin\theta = \frac{a}{\rho}$
 $= -i a \cdot 2\pi \frac{B^* D^3}{8} \frac{a \cdot s}{\rho^5} \vec{e}_x$ avec: $s = aX$ et $\rho = \sqrt{a^2 + s^2} = a\sqrt{1 + X^2}$
 $= -i \frac{\pi B^* D^3}{4} \frac{a^3 X}{a^5 [1 + X^2]^{5/2}} \vec{e}_x$

Donc: $\vec{F}_{a/s} = - \frac{\pi B^* D^3}{4a^2} \frac{X}{[1 + X^2]^{5/2}} i \vec{e}_x$ $K_2 = - \frac{\pi B^* D^3}{4a^2}$

12. Loi des mailles pour la spire: $e = Ri$ avec: $e = - \frac{d\Phi_{a/s}}{dt}$

On calcule: $\frac{d\Phi_{a/s}}{dt} = - \frac{3}{2} \Phi_0 \frac{2X\dot{X}}{(1 + X^2)^{5/2}}$

Donc: $i = \frac{3\Phi_0}{R} \frac{X\dot{X}}{(1 + X^2)^{5/2}}$ $K_1 = \frac{3\Phi_0}{R}$

14. On a alors: $K = K_1 K_2 = \frac{3}{R} \left(\frac{\pi B^* D^3}{12a} \right) \left(- \frac{\pi B^* D^3}{4a^2} \right) \Rightarrow K = \frac{\pi^2 B^{*2} D^6}{16 R a^3}$

Puis: $\vec{F}_{a/s} = \frac{K X^2 \dot{X}}{(1 + X^2)^5} \vec{e}_x$

D'après l'expression de K: La force $\vec{F}_{a/s}$ est d'autant plus intense que l'aimantation de l'aimant est forte, que la spire est petite et peu résistive.

La force est d'autant plus intense que la vitesse est élevée.

La force est faible quand l'aimant est à grande distance ($|X| \gg 1$)

$$\begin{aligned}
 15. \quad \vec{F}_{s/a} &= (-\mu_0 \vec{e}_{30} \cdot \text{grad}) \vec{B}_s \\
 &= \left(-\frac{4\pi}{3} \left(\frac{D}{2}\right)^3 M \frac{\partial}{\partial s} \right) \left(B_{s0} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{s}{a}\right)^2\right)^{3/2}} \vec{e}_x \right) \\
 &= -\frac{\pi D^3 M}{6} B_{s0} \frac{d}{ds} \left(\left(1 + \left(\frac{s}{a}\right)^2\right)^{-3/2} \right) \vec{e}_{30} \\
 &= -\frac{\pi D^3 M}{6} \frac{\mu_0 i}{2a} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{2s}{a^2} \left(1 + \left(\frac{s}{a}\right)^2\right)^{-5/2} \vec{e}_x \quad \text{or: } \mu_0 M = B^* \text{ et } \frac{s}{a} = X
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{F}_{s/a} = \frac{\pi B^* D^3}{4a^2} i \cdot \frac{X}{(1+X^2)^{5/2}} \vec{e}_x = -\vec{F}_{a/s}} \quad \text{Cela concorde avec le résultat de la question B}$$

16. Il n'y a pas de contradiction: l'inductance propre L traduit l'action de la bobine sur elle-même, alors que l'on s'intéresse à l'action de la bobine sur l'aimant.

② Interaction électromécanique entre un aimant et un bloc de cuivre

2.1 Modélisation et expérience

17. La force $\vec{F}_{a/s}$ décroît fortement avec X (en X^{-8}). Les couches profondes du bloc de cuivre ne subissent quasiment aucune force. Leur présence ne change rien et on peut donc supposer le bloc de cuivre semi-infini selon Ox .
Pour supposer le bloc de cuivre infini selon Oy et Oz , il faut que ses dimensions réelles selon Oy et Oz soient grandes devant s_0 .

18. Le champ magnétique variable \vec{B}_a crée un champ électrique induit \vec{E} tel que $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}_a}{\partial t}$.
Par analogie avec les propriétés de symétrie de \vec{B} en magnétostatique issues de $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, on peut dire que \vec{E} est perpendiculaire aux plans de symétrie de \vec{B}_a .
Le plan $(O, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie de $\vec{B}_a \Rightarrow \vec{E}$ induit est parallèle à \vec{e}_x .
 $\Rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E}$ selon \vec{e}_x
 \Rightarrow les lignes de courant sont des cercles d'axe Ox

19. Le freinage de l'aimant sera plus important avec le bloc de cuivre car les courants de Foucault induits seront plus importants dans ce grand volume que dans une seule spire.

$$20. \quad \vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow [B^*] = \frac{[F]}{[q][v]} = \frac{MLT^{-2}}{Q \cdot LT^{-1}} \Rightarrow \boxed{[B^*] = MQ^{-1}T^{-1}}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \sigma \frac{\vec{F}}{q} \Rightarrow [\sigma] = \frac{[j][q]}{[F]} = \frac{QT^{-1}L^{-2} \cdot Q}{MLT^{-2}} \Rightarrow \boxed{[\sigma] = Q^2 M^{-1} T L^{-3}}$$

21. Φ , Ψ et W sont sans dimension

22. ?

23. L'aimant s'approche du bloc de cuivre en étant ralenti puis il s'arrête à 6 mm du bloc au bout de 0,15 s.

Temps caractéristique de freinage: $\delta t = 0,15 \text{ s}$
Distance caractéristique de freinage: $\delta s = 39 \text{ mm}$ (45-6)

24. Le problème se pose car, en régime variable, il y a un phénomène d'effet de peau dans le métal: le champ magnétique créé par l'aimant va être atténué progressivement dans le bloc de cuivre. Une spire élémentaire du bloc va être soumise à un champ magnétique différent de celui qu'elle subissait si elle était seule.

25. La distance caractéristique d'écrantage dans le métal est l'épaisseur de peau: $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega}}$

Ici on prend: $\omega \approx \frac{1}{\tau_B}$ donc: $\delta_B \approx \sqrt{\frac{\tau_B}{\mu_0 \gamma}}$

26. En prenant: $\tau_B \approx \tau^* \approx 0,1 \text{ s}$ $\mu_0 \approx 10^{-6} \text{ H m}^{-1}$ $\gamma \approx 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$

$\Rightarrow \delta_B \approx 0,1 \text{ mm}$

On a $\delta_B > s$ donc on peut considérer que le champ magnétique de l'aimant n'est pas très atténué dans le bloc de cuivre. Une spire élémentaire subit le même champ que si elle était seule.

27. On remplace s par v et e^2 par $da \cdot dv$:

$$d^2F_{a/B} = G \frac{a^3 v^2 da dv}{(a^2 + v^2)^5}$$

28. On intègre $d^2F_{a/B}$ en faisant varier v de s à $+\infty$ et a de 0 à $+\infty$:

$$\begin{aligned} F_{a/B} &= \int_s^{+\infty} \int_0^{+\infty} G \frac{a^3 v^2}{(a^2 + v^2)^5} da dv = G v \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{a^3 da}{(a^2 + v^2)^5} \right) v^2 dv \\ &= G v \int_s^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{a^3 da}{v^{10} (1 + \frac{a^2}{v^2})^5} \right) v^2 dv \quad \text{on pose } x = \frac{a}{v} \rightarrow dx = \frac{da}{v} \\ &= G v \int_s^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{v^6 (1 + x^2)^5} \right) v^2 dv \\ &= G v \int_s^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{(1 + x^2)^5} \right) \frac{dv}{v^4} = G v \frac{1}{24} \int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^4} = \frac{G v}{24} \left[-\frac{1}{3v^3} \right]_s^{+\infty} \end{aligned}$$

Donc: $F_{a/B} = \frac{1}{72} G v \frac{1}{s^3} \quad \alpha = \frac{1}{72}$

2.2 Etude du mouvement dans l'espace des phases

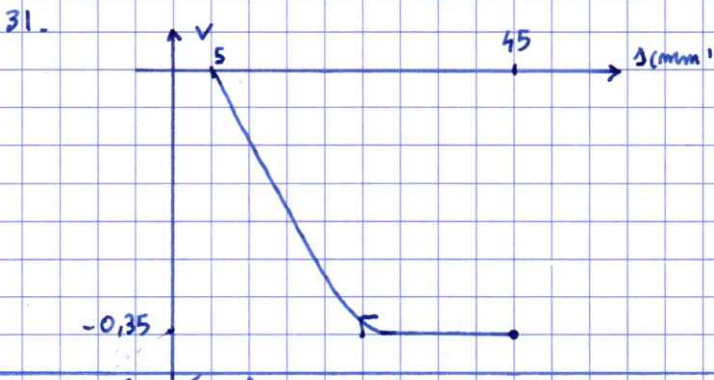
29. L'aimant est soumis à la force $\vec{F}_{B/a} = -\vec{F}_{a/B}$

Le théorème de la quantité de mouvement pour l'aimant dans R galiléen donne, en projection selon Ox : $m \dot{v} = F_{B/a}$

Soit: $m \dot{v} = -\alpha G \frac{v}{s^3} \Rightarrow \dot{v} = -2Q \frac{v}{s^3}$

30. On a: $\dot{v} = -2Q \frac{v}{s^3}$ On intègre par rapport au temps: $v = \frac{Q}{s^2} + \text{cste}$

La quantité: $A(s, v) = v - \frac{Q}{s^2}$ est une intégrale première du mouvement



$$G \approx 10^{-5}$$

$$Q \approx 1,7 \cdot 10^{-5}$$

$$\frac{Q}{s_0^2} \approx 8,5 \cdot 10^{-3} \ll |v_0| \approx 0,35 \text{ m s}^{-1}$$

32. L'intégrale première donne: $v - \frac{Q}{s^2} = v_0 - \frac{Q}{s_0^2} \approx v_0$ d'après la question précédente

L'aimant s'arrête ($v=0$) à l'abscisse s_a telle que: $-\frac{Q}{s_a^2} = v_0 \Rightarrow s_a = \sqrt{\frac{Q}{v_0}}$

L'aimant n'entre pas en collision avec le bloc si: $s_a > \frac{D}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{-Q}{v_0}} > \frac{D}{2} \Rightarrow -\frac{Q}{v_0} > \frac{D^2}{4}$
 $\Rightarrow \frac{Q}{v_0} < -\frac{D^2}{4}$

Donc: $v_0 > v_{oc} = \frac{-4Q}{D^2}$

33. $|v_{oc}| = \frac{4Q}{D^2} = \frac{4}{D^2} \frac{1}{72} \frac{1}{2m} \frac{\pi}{32} (B^* D^3)^2 \sigma \Rightarrow |v_{oc}| = \frac{\pi B^{*2} D^4 \sigma}{1152 m}$

$|v_{oc}|$ est d'autant plus grand (freinage fort) que:

- m est petit (aimant léger)
- σ est grand (métal bon conducteur)
- B^* et D sont grands (aimant fort)

On a: $|v_{oc}| = |v_0| \frac{\pi B^{*2} D^4 \sigma}{1152 m |v_0|} = |v_0| \frac{\pi}{1152 W}$ donc: $\Omega(W) = \frac{\pi}{1152 W}$

34. $|v_{oc}| = 0,7 \text{ m s}^{-1}$

35. On a $s = \frac{D}{2} = 5 \text{ mm}$ pour $v_0 = -0,85 \text{ m s}^{-1}$ donc $|v_{oc}|_{exp} = 0,85 \text{ m s}^{-1} > |v_{oc}|$

36. Les trois courbes ont la même allure: s varie quasiment entre les mêmes valeurs donc la distance caractéristique de freinage est la même quelle que soit v_0 . La fonction Φ doit alors être indépendante de $|v_0|$ donc de W : Φ est une constante

• Soit Δt l'intervalle de temps entre deux mesures.

- Pour $v_0 = -0,85 \text{ m s}^{-1}$ le freinage se fait en $11 \Delta t$
 $\downarrow \times 0,66$ $\downarrow \times 1,64$
- Pour $v_0 = -0,56 \text{ m s}^{-1}$ le freinage se fait en $18 \Delta t$
 $\downarrow \times 0,64$ $\downarrow \times 1,66$
- Pour $v_0 = -0,36 \text{ m s}^{-1}$ le freinage se fait en $30 \Delta t$

Or: $0,6 \approx \frac{1}{1,6}$ donc on en déduit que le temps caractéristique de freinage varie en $\frac{1}{|v_0|}$