dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$

* $s : n \in \mathbb{N} \longmapsto \frac{(n+1)(n\ \ )}{2} \in \mathbb{N}$ strictement croissante (donc injective)

* surjectivité de f :

$\forall m \in \mathbb{N}$: $\to$ $\{n \in \mathbb{N} \mid s(n) \leq m\} \overset{s(n) \leq n}{\subset} [\![0 ; m]\!]$ donc partie non vide ($s(0) = 0$ donc 0 y est) majorée de $\mathbb{N}$ donc admet un plus grand élément M ("numéro de ligne verte")

$s(M) \leq m < s(M+1)$

$\to$ donc on pose $\begin{cases} k = m - s(M) \in \mathbb{N} \\ \ell = M - k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

d'où $\ell = M - m + s(M) = s(M+1) - 1 - m$

$s(M+1) = s(M) + \frac{(1+M) \times 2}{2}$ $\qquad \geq -1$

donc $\ell \in \mathbb{N}$

$\to$ $f(\ell ; k) = k + s(k+\ell) = m - s(M) + s(M) = m$

* injectivité

$\begin{cases} f(\ell ; k) = f(\ell' ; k') \text{ ie } k + s(k+\ell) = k' + s(k'+\ell') \quad (*) \\ \text{avec } k \leq k' \text{ (on échange les rôles si besoin)} \end{cases}$

donc $s(k+\ell) - s(k'+\ell') = k' - k \geq 0$

d'où $s(k+\ell) \geq s(k'+\ell')$

or s $\nearrow$ strictement

donc $\begin{cases} k + \ell = k' + \ell' \quad ① \\ \text{ou} \\ k + \ell > k' + \ell' \text{ et } k + \ell \geq k' + \ell' + 1 \quad ② \end{cases}$

d'où cas ① $\begin{cases} k + \ell = k' + \ell' \\ k = k' \text{ en injectant ds } (*) \end{cases}$ ie $\begin{cases} k = k' \\ \ell = \ell' \end{cases}$

cas ② $s(k+\ell) \geq s(k'+\ell'+1) = s(k'+\ell') + (k'+\ell') + 1$

d'où $k + s(k+\ell) \geq k + s(k'+\ell') + k' + \ell' + 1$

et via $(*)$ $k + s(\ell+k) \geq \underbrace{k + \ell' + 1}_{\in \mathbb{N}^*} + (k + s(\ell+k))$

c'est impossible