démonstration:

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

H_m : " Pour toute famille $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}^I$ d'événements indépendants, on pose pour $i \in I$, $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

Si $I_+ = \{i \in I \mid B_i = A_i\}$ et $I_- = \{i \in I \mid B_i = \overline{A_i}\} = I \setminus I_+$

alors

$\forall J \subset I$ J fini tq $\#(J \cap I_-) = m$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(B_j) \text{ ie } (B_j)_{j\in I} \text{ indépendants"}$$

• Si on montre H_m pour tout $m \in \mathbb{N}$, on aura bien l'indépendance des événements $(B_j)_{j\in J}$.

• initialisation: $m = 0$

$\forall j \in J$ $B_j = A_j$ donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(B_j)$ par hypothèse sur $(A_i)_{i\in I}$

• hérédité: on suppose H_m vrai ($m \in \mathbb{N}$ fixé)

Soit J fini $J \subset I$ avec $\#(J \cap I_-) = m+1$

On fixe $j_0 \in J \cap I_-$

donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \mathbb{P}\left(\overline{A}_{j_0} \cap \left(\bigcap_{j\in J\setminus\{j_0\}} B_j\right)\right)$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J\setminus\{j_0\}} B_j\right) - \mathbb{P}\left(A_{j_0} \cap \left(\bigcap_{j\in J\setminus\{j_0\}} B_j\right)\right)$$

$(\overline{A}_{j_0}, A_{j_0})$ sce

avec • $J' = J \setminus \{j_0\}$ $\forall i \in I$ $\tilde{B}_i = B_i$ et $\# J' \cap I'_- = m$

donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J\setminus\{j_0\}} B_j\right) = \prod_{j\in J\setminus\{j_0\}} \mathbb{P}(B_j)$ via H_m

• $J'' = J$ $\forall i \in I$ $\begin{cases} \tilde{B}_i = B_i \text{ si } i \neq j_0 \\ \tilde{B}_{j_0} = A_{j_0} \end{cases}$

donc $J'' \cap I''_- = (J \setminus \{j_0\}) \cap (I_- \setminus \{j_0\})$ de cardinal m

donc $\mathbb{P}\left(A_{j_0} \cap \left(\bigcap_{j\in J\setminus\{j_0\}} B_j\right)\right) = \mathbb{P}(A_{j_0}) \prod_{j\in J\setminus\{j_0\}} \mathbb{P}(B_j)$ via H_m

donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \underbrace{(1 - \mathbb{P}(A_{j_0}))}_{= \mathbb{P}(\overline{A_{j_0}}) = \mathbb{P}(B_{j_0})} \prod_{j\in J\setminus\{j_0\}} \mathbb{P}(B_j) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(B_j)$