# démonstration du lemme des coalitions [non exigible]

① Soit $X_1, \dots X_n$ des variables aléatoires discrètes ($n \geqslant 2$) indépendantes.

* Alors pour $m \in [\![1; n-1]\!]$, les variables $(X_1; \dots X_m)$ et $(X_{m+1}, \dots X_n)$ sont indépendantes;

En effet

$\forall u \in (X_1; \dots X_m)(\Omega) \subset X_1(\Omega) \times \dots \times X_m(\Omega)$

$\forall v \in (X_{m+1}; \dots X_n)(\Omega) \subset X_{m+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$

$\exists (y_1; \dots y_m) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_m(\Omega)$ tq $u = (y_1; \dots y_m)$

$\exists (y_{m+1}; \dots y_n) \in X_{m+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ tq $v = (y_{m+1}; \dots y_n)$

donc $\mathbb{P}(((X_1; \dots X_m) = u) \cap (X_{m+1}; \dots X_n) = v)$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=1}^{n} (X_\ell = y_\ell)\right)$$

$$= \prod_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}(X_\ell = y_\ell)$$ indépendance des $X_1, \dots X_n$

$$= \left(\prod_{\ell=1}^{m} \mathbb{P}(X_\ell = y_\ell)\right)\left(\prod_{\ell=m+1}^{n} \mathbb{P}(X_\ell = y_\ell)\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=1}^{m} (X_\ell = y_\ell)\right) \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=m+1}^{n} (X_\ell = y_\ell)\right)$$ $X_1, \dots X_n$ indépendantes $\Rightarrow X_1, \dots X_m$ indépendantes et $X_{m+1}, \dots X_n$ aussi

$$= \mathbb{P}((X_1; \dots X_m) = u) \times \mathbb{P}((X_{m+1}; \dots X_n) = v)$$

* Si $m = 0$ ou $m = n$, on peut considérer la variable aléatoire "vide" comme constante donc elle est bien indépendante avec toute autre variable.

* Ainsi via le cas particulier ($X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$)

$f(X_1; \dots X_m)$ et $g(X_{m+1}; \dots X_n)$ sont indépendantes

Il suffit donc de prouver le cas particulier

② preuve du cas particulier

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega; \mathcal{A}; \mathbb{P})$ indépendantes.

$\underline{\forall u \in f(X(\Omega))}$ $\quad$ $\underline{\forall v \in g(Y(\Omega))}$

$$\mathbb{P}(f(X)=u) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } f(x)=u}} \mathbb{P}(X=x) \quad (X \text{ variable discrète})$$

$$\mathbb{P}(g(Y)=v) = \sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ \text{tq } g(y)=v}} \mathbb{P}(Y=y) \quad (Y \text{ variable discrète})$$

Pour tout $x \in f^{-1}(\{u\})$, la famille $(\mathbb{P}(Y=y))_{y \in g^{-1}(\{v\})}$ est sommable de somme $\mathbb{P}(g(Y)=v)$ donc la famille $(\mathbb{P}(X=x) \times \mathbb{P}(Y=y))_{y \in g^{-1}(\{v\})}$ aussi, de somme $\mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(g(Y)=v)$.

La famille $(\mathbb{P}(X=x))_{x \in f^{-1}(\{u\})}$ est sommable de somme $\mathbb{P}(f(X)=u)$ donc la famille $\mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(g(Y)=v)$ est sommable de somme $\mathbb{P}(f(X)=u)\,\mathbb{P}(g(Y)=v)$.

Donc via le théorème de sommation par paquets :

- $\forall x \in f^{-1}(\{u\})$ $\quad I_x = \{(x;y) \mid y \in g^{-1}(\{v\})\} \subset \{x\} \times Y(\Omega)$ vérifie $f^{-1}(\{u\}) \subset X(\Omega)$ donc au plus dénombrable
  $I_x \cap I_{x'} = \emptyset \quad \forall x \neq x'$
  $$\bigcup_{x \in f^{-1}(\{u\})} I_x = f^{-1}(\{u\}) \times g^{-1}(\{v\})$$
  $\forall x$ $I_x$ au plus dénombrable
- la famille $(\mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y))_{(x;y) \in f^{-1}(\{u\}) \times g^{-1}(\{v\})}$ est formée de réels positifs.

- donc via le théorème de sommation par paquets la famille $(\mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y))_{(x;y) \in f^{-1}(\{u\}) \times g^{-1}(\{v\})}$ est sommable et

$$\mathbb{P}(f(X)=u)\,\mathbb{P}(g(Y)=v) = \sum_{x' \in f^{-1}(\{u\})} \sum_{(x;y) \in I_{x'}} \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y)$$

sommation par paquets

$$= \sum_{(x;y) \in f^{-1}(\{u\}) \times g^{-1}(\{v\})} \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y)$$

$X \perp\!\!\!\perp Y$

$$= \sum_{(x;y) \in f^{-1}(\{u\}) \times g^{-1}(\{v\})} \mathbb{P}((X=x) \cap (Y=y))$$

voir cela 7 recto

donc $\underbrace{\mathbb{P}(f(X)=u) \times \mathbb{P}(g(Y)=v)}_{\text{loi de } (f;g)((X;Y))} = \sum_{(x;y)\in(f;g)^{-1}(\{(u;v)\})} \mathbb{P}((X;Y)=(x;y))$,

$= \mathbb{P}((f;g)(X;Y)=(u;v))$

$= \mathbb{P}((f(X);g(Y))=(u;v))$

$= \underline{\mathbb{P}((f(X)=u)\cap(g(Y)=v))}$

③ Par récurrence sur le nombre p de coalitions ($p=1$ ok, $p=2$ cf ②).

Supposons le lemme des coalitions pour p coalitions.

Soit $(X_1;\dots X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires discrètes indépendantes et $1\leq m_1 < m_2 < \dots < m_{p+1} \leq n$

alors $(f_1;\dots f_p)\circ((X_1;\dots X_{m_1});(X_{1+m_1};\dots X_{m_2});\dots(X_{1+m_{p-1}};\dots;X_{m_p}))$

i.e. $Z = f\circ(X_1;\dots X_{m_p})$ et $Y_{p+1} = f_{p+1}(X_{1+m_p};\dots X_{m_{p+1}})$ sont indépendantes.(1)

Comme sous-famille d'une famille de variables indépendantes, $X_k$ avec $k$ dans $[\![1;m_p]\!]$ sont indépendantes donc via le lemme des coalitions à p coalitions, $Y_1 = f_1(X_1;\dots X_{m_1})$, $Y_2 = f_2(X_{1+m_1};\dots X_{m_2})$ ... et $Y_p = f_p(X_{1+m_{p-1}};\dots;X_{m_p})$ sont indépendantes (2).

Ainsi $\forall(u_1,\dots u_{p+1})\in Y_1(\Omega)\times\dots Y_p(\Omega)\times Y_{p+1}(\Omega)$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=1}^{p+1}(Y_\ell=u_\ell)\right) = \mathbb{P}((Z=(u_1,\dots u_p))\cap(Y_{p+1}=u_{p+1}))$$

$$\overset{(1)}{=} \mathbb{P}(Z=(u_1,\dots u_p))\times\mathbb{P}(Y_{p+1}=u_{p+1})$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=1}^{p}(Y_\ell=u_\ell)\right)\times\mathbb{P}(Y_{p+1}=u_{p+1})$$

$$\overset{(2)}{=} \left(\prod_{\ell=1}^{p}\mathbb{P}(Y_\ell=u_\ell)\right)\mathbb{P}(Y_{\ell+1}=u_{p+1})$$

$$= \prod_{\ell=1}^{p+1}\mathbb{P}(Y_\ell=u_\ell)$$

Donc $Y_1,\dots Y_{p+1}$ sont bien indépendants.