Démonstration de la caractérisation ("$\Leftarrow$")

Soit $B_E = (e_1; \dots e_m)$ une base de E et $\|\cdot\|_E$ la norme sur E associée (ie $\forall \vec{h} \in E \quad \|\vec{h}\|_E = \max\limits_{\ell \in [\![1;m]\!]} |e_\ell^*(\vec{h})|$ où e_ℓ^* désigne l'application ℓième coordonnée dans B_E).

① On fixe $a \in \mathcal{U}$ et on cherche à prouver que f est différentiable en a.

→ On pose $L : h \in E \longmapsto \sum\limits_{\ell=1}^{m} e_\ell^*(h)\, \partial_\ell f(a) = \sum\limits_{\ell=1}^{m} h_\ell \partial_\ell f(a) \in F$

(où $(h_1; \dots h_m) \in \mathbb{R}^m$ coordonnées de h dans B_E).

C'est le candidat à être $df(a)$

→ Comme $\mathcal{U}$ est un ouvert contenant a :

$\exists r > 0$ tq $\quad B_\infty(a; r) \subset \mathcal{U}$

$\forall k \in [\![1;m]\!] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists r_k(\varepsilon) > 0$ tq $\forall x \in B_\infty(a; r_k(\varepsilon))$

$$\|\partial_k f(x) - \partial_k f(a)\|_F \leq \varepsilon$$

(continuité de $\partial_k f$ en a)

donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r(\varepsilon) = \min(r, r_1(\varepsilon), \dots r_m(\varepsilon)) > 0$ tq

$$\begin{cases} B_\infty(a; r(\varepsilon)) \subset \mathcal{U} \\ \forall x \in B_\infty(a; r(\varepsilon)) \quad \forall k \in [\![1;m]\!] \\ \quad \|\partial_k f(x) - \partial_k f(a)\|_F \leq \varepsilon \end{cases}$$

→ Soit $\varepsilon > 0$ et $\vec{h} \in B_\infty(0_E; r(\varepsilon))$ fixé.

On pose $\vec{h} = \sum\limits_{\ell=1}^{m} h_\ell e_\ell$ (ie $h_\ell = e_\ell^*(\vec{h})$) $\begin{pmatrix} \text{donc } |h_\ell| < r(\varepsilon) \\ \forall \ell \in [\![1;m]\!] \end{pmatrix}$

$$\forall k \in [\![1;m]\!] \quad \vec{u}_k = \sum_{\ell=1}^{k} h_\ell e_\ell \quad \text{et} \quad \vec{u}_0 = 0_E$$

donc $\forall k \in [\![0;m]\!] \quad a + \vec{u}_k \in B_\infty(a; r(\varepsilon))$

Par télescopage

$$r(\vec{h}) = f(a + \vec{h}) - f(a) - L(\vec{h})$$
$$= \sum_{\ell=1}^{m} \left(f(a + \vec{u}_\ell) - f(a + \vec{u}_{\ell-1}) - h_\ell \partial_\ell f(a) \right) \quad (*)$$

Or pour tout $\ell \in [\![1;m]\!]$, $s \in]-r(\varepsilon); r(\varepsilon)[\xrightarrow{\varphi_\ell} f(a + \vec{u}_{\ell-1} + s e_\ell) - s\,\partial_\ell f(a)$ est C^1 par définition de l'existence de $\partial_\ell f$ sur $\mathcal{U}$

et $\varphi_\ell : s \longmapsto \partial_\ell f(a+\vec{u}_{\ell-1}+se_\ell)-\partial_\ell f(a)$

donc via l'inégalité des accroissements finis

$$\|\varphi_\ell(h_\ell)-\varphi_\ell(0)\|_F \leq |h_\ell-0| \sup_{s\in[0;h_\ell]} \|\partial_\ell f(\underbrace{a+\vec{u}_{\ell-1}+se_\ell}_{\in B_\theta(a;r(\varepsilon))})-\partial_\ell f(a)\|_F$$

donc $\|f(a+\vec{u}_\ell)-f(a+\vec{u}_{\ell-1})-h_\ell\partial_\ell f(a)\|_F \leq \|h\|_E\ \varepsilon$

Ainsi via l'inégalité triangulaire $(*)$ assure

$$\|f(a+\vec{h})-f(a)-L(\vec{h})\|_F \leq \sum_{\ell=1}^{n}\|f(a+\vec{u}_\ell)-f(a+\vec{u}_{\ell-1})-h_\ell\partial_\ell f(a)\|_F$$
$$\leq n\|h\|_E\ \varepsilon$$

$\rightarrow$ Ainsi $\forall\tilde{\varepsilon}>0\quad \exists r_{\tilde{\varepsilon}}=r(\tilde{\varepsilon}/n)>0$ tq

$\forall\vec{h}\in B_\theta(0_E;r_{\tilde{\varepsilon}})\quad \|f(a+\vec{h})-f(a)-L(\vec{h})\|_F\leq\tilde{\varepsilon}\|\vec{h}\|_E$

ie $f(a+\vec{h})=f(a)+L(\vec{h})+o(\|h\|_E)$

avec $L\in\mathcal{L}(E;F)$ par choix de L

Donc f est différentiable en a et $df(a)$ est donné par $\vec{h}\in E\longmapsto\sum_{\ell=1}^{n}h_\ell\partial_\ell f(a)$

② On fixe une base $\mathcal{B}_F$ de F alors

$\Psi : v\in\mathcal{L}(E;F)\longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(v)\in\mathcal{M}_{\dim F,\dim(E)}(\mathbb{R})$

est un isomorphisme entre espaces vectoriels de dimension finie donc Ψ et Ψ^{-1} sont continues

Or $\Psi(df(a))=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\partial_1 f(a),\dots\partial_n f(a))$

donc $a\in\mathcal{U}\longmapsto\Psi(df(a))$ est continue car ses composantes dans la base canonique de $\mathcal{M}_{\dim F,\dim E}(\mathbb{R})$ sont continues (ce sont les composantes de $\partial_\ell f$ dans $\mathcal{B}_F$)

donc $a\in\mathcal{U}\longmapsto\Psi^{-1}(\Psi(df(a))$ ie df est continue sur $\mathcal{U}$ par composition.