# Déterminant de Vandermonde

<u>propriété</u> : pour tout $(a_0; \dots a_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$ $(m \in \mathbb{N}^*)$

le déterminant de Vandermonde est donné par

$$V_{m+1}(a_0; \dots a_m) \overset{\text{def}}{=} \begin{array}{c|c} & \text{colonne } k+1 \\ \hline & \begin{vmatrix} 1 & a_0 & & & a_0^m \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & a_\ell^k & & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_m & & & a_m^m \end{vmatrix}_{m+1} \quad \text{ligne } \ell+1 \end{array}$$

Il vaut $V_{m+1}(a_0; \dots a_m) = \prod_{0 \leq i < j \leq m} (a_j - a_i)$

<u>démonstration</u> : par récurrence sur $m$

- $V_0(a_0) = 1$ le produit est vide
- $V_1(a_0, a_1) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 - a_0$
- Soient $(a_0, \dots a_{m+1}) \in \mathbb{K}^{m+2}$

$\rightarrow$ si les $a_k$ sont 2 à 2 distincts

Alors $P : x \in \mathbb{K} \longmapsto V_{m+2}(x, a_1, \dots a_{m+1}) \in \mathbb{K}$ est une fonction polynômiale de degré au plus $m+1$ par développement par rapport à la 1ère ligne et le coefficient de $x^{m+1}$ est $(-1)^{m+2+1} V_{m+1}(a_1, \dots a_{m+1})$

Pour $x = a_\ell$, $P(a_\ell) = 0$ car il y a 2 lignes égales.

Ainsi $P$ admet au moins $m+1$ racines distinctes $a_\ell$ pour $\ell \in [\![1; m+1]\!]$ et est de degré au plus $m+1$

donc $P = \alpha \prod_{\ell=1}^{m+1} (X - a_\ell)$ avec $\alpha = (-1)^{m+2+1} V_{m+1}(a_1, \dots a_{m+1})$

(coefficient dominant)

Donc $V_{m+2}(a_0; \dots a_{m+1}) = P(a_0) = (-1)^{m+3} V_{m+1}(a_1, \dots a_{m+1}) \times \prod_{\ell=1}^{m+1} (a_0 - a_\ell)$

$= V_{m+1}(a_1, \dots a_{m+1}) \times \prod_{\ell=1}^{m+1} (a_\ell - a_0)$

d'où par hypothèse de récurrence

$$V_{n+2}(a_0, \dots, a_{n+1}) = \left( \prod_{1 \leq k < l \leq n+1} (a_l - a_k) \right) \times \prod_{l=1}^{n+1} (a_l - a_0)$$

$$= \prod_{0 \leq k < l \leq n+1} (a_l - a_k)$$

→ si les $a_k$ ne sont pas 2 à 2 distincts

$V_{n+2}(a_0, \dots, a_{n+1}) = 0$ (2 lignes égales dans le déterminant)

et $\prod_{0 \leq k < l \leq n+1} (a_l - a_k) = 0$

→ la formule est donc vraie au rang $n+1$.