b) analyse du problème : introduction d'une série perturbatio

On rappelle $H : f \in \mathcal{C}^1(I;F) \longmapsto \left(t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s)(f(s)) + b(s))\,ds\right)$

Soit Ψ un point fixe de H ie $H(\Psi) = \Psi$

Alors $\forall t \in I \quad \Psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s)(\Psi(s)) + b(s))\,ds$

$$= \underbrace{x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\,ds}_{\varphi_0(t)} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} a(s)(\Psi(s))\,ds}_{\rho_1(t)}$$

donc $\Psi = \varphi_0 + \rho_1$

et $\forall t \in I \quad \Psi(t) = \varphi_0(t) + \int_{t_0}^{t} a(s)(\varphi_0(s) + \rho_1(s))\,ds$

linéarité $a(s)$

$$= \varphi_0(t) + \int_{t_0}^{t} (a(s)(\varphi_0(s)) + a(s)(\rho_1(s)))\,ds$$

linéarité intégrale + $s \mapsto a(s)(\varphi_0(s))$ $\mathcal{C}^0$

$$= \varphi_0(t) + \varphi_1(t) + \rho_2(t)$$

Par récurrence, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi_{n+1} : t \in I \longmapsto \int_{t_0}^{t} a(s)(\varphi_n(s))\,ds$$

$$\rho_{n+1} : t \in I \longmapsto \int_{t_0}^{t} a(s)(\rho_n(s))\,ds$$

C'est possible car on montre simultanément l'existence des φ_n, ρ_n et leur appartenance à $\mathcal{C}^1(I;F)$.
($\rho_0 = \Psi$)

On observe par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \Psi = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k + \rho_{n+1}$$

* $n = 0$ ok
* Si $\Psi = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k + \rho_{n+1}$

alors $\forall t \in I \quad \Psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s)(\Psi(s))\,ds + \int_{t_0}^{t} b(s)\,ds$

hypothèse de récurrence

$$= \varphi_0(t) + \int_{t_0}^{t} a(s)\left(\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(s) + \rho_{n+1}(s)\right)dt$$

linéarité de $a(s)$ et de l'intégrale

$$= \varphi_0(t) + \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\int_{t_0}^{t} a(s)(\varphi_k(s))\,ds}_{\varphi_{k+1}(t)} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} a(s)(\rho_{n+1}(s))\,ds}_{\rho_{n+2}(t)}$$

donc $\Psi = \sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k + \rho_{n+2}$

On espère que $(\rho_m)_{m\geq 0}$ converge simplement vers 0 sur I, on aurait alors $\Psi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k$

c) construction d'une solution (approximations successives de Picard)

On définit une suite de fonctions par récurrence:

- $\varphi_0 : t \in I \longmapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\,ds$ donc $\varphi_0 \in C^1(I;F)$ et $\varphi'_0 = b$
- $\forall m \in \mathbb{N}$ $\quad \varphi_{m+1} : t \in I \longmapsto \int_{t_0}^{t} a(s)\,(\varphi_m(s))\,ds$

d'où $\varphi_{m+1} \in C^1(I;F)$ et $\varphi'_{m+1} : t \in I \mapsto a(t)(\varphi_m(t))$ (par récurrence)

① Montrons que la série de fonctions $\sum \varphi_m$ converge normalement sur tout segment inclus dans I.

- Soit $[\alpha;\beta]$ un segment inclus dans I. Quitte à remplacer α par $\min(\alpha;\beta;t_0) \in I$ et β par $\max(\alpha;\beta;t_0) \in I$ on suppose $\alpha \leq t_0 \leq \beta$ (la convergence normale sur $[\alpha;\beta]$ impliquera bien celle sur le segment initial)

- On fixe une norme $\|\cdot\|$ sur F, on en déduit la norme $|||\cdot|||$ subordonnée sur $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F)$.

Alors a est continue sur le segment $[\alpha;\beta]$ donc y est bornée; on note $A = N_{\infty}^{[\alpha;\beta]}(a) = \sup_{t\in[\alpha;\beta]} (|||a(t)|||)$

- Par récurrence sur m, prouvons : $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\forall t \in [\alpha;\beta] \qquad \|\varphi_m(t)\| \leq \frac{|t-t_0|^m}{m!} N_{\infty}^{[\alpha;\beta]}(\varphi_0)\, A^m \qquad (*)$$

$\underline{m=0}$

La fonction φ_0 est continue sur le segment $[\alpha;\beta]$ donc y est bornée donc $N_{\infty}^{[\alpha;\beta]}(\varphi_0)$ existe et $\forall t \in [\alpha;\beta] \quad \|\varphi_0(t)\| \leq N_\infty^{[\alpha;\beta]}(\varphi_0) = \underbrace{\frac{|t-t_0|^0}{0!}}_{=1} A^0 \, N_\infty^{[\alpha;\beta]}(\varphi_0)$

"$n \Rightarrow n+1$"

On suppose : $\forall s \in [\alpha;\beta] \quad \|\varphi_n(s)\| \leq \frac{|s-t_0|^n}{n!} A^n N_\infty^{[\alpha;\beta]}(\varphi_0)$

d'où $\forall s \in [\alpha;\beta] \quad \|a(s)(\varphi_n(s))\| \underset{\text{définition norme subordonnée}}{\leq} |||a(s)||| \, \underbrace{\|\varphi_n(s)\|}_{\geq 0}$

$$\leq A\|\varphi_n(s)\|$$

hypothèse de récurrence

$$\leq \frac{|s-t_0|^n}{n!} A^{n+1} N_\infty^{[\alpha;\beta]}(\varphi_0)$$

donc par croissance de l'intégrale à bornes croissantes avec $\varepsilon = 1$ si $t \geq s_0$ $\varepsilon = -1$ si $t < s_0$

$$\forall t \in [\alpha;\beta] \quad \|\varphi_{n+1}(t)\| = \left\| \varepsilon \int_{t_0}^t a(s)(\varphi_n(s))\, ds \right\|$$

$$\leq \varepsilon \int_{t_0}^t \|a(s)(\varphi_n(s))\| ds$$

$$\leq \varepsilon \int_{t_0}^t \frac{|s-t_0|^n}{n!} A^{n+1} N_\infty^{[\alpha;\beta]}(\varphi_0)\, ds$$

$$\leq \frac{A^{n+1}}{n!} N_\infty^{[\alpha;\beta]}(\varphi_0) \times \left| \left[\frac{(s-t_0)^{n+1}}{n+1} \right]_{t_0}^t \right|$$

$$\leq \frac{|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \times A^{n+1} \times N_\infty^{[\alpha;\beta]}(\varphi_0)$$

- Via (*), pour tout $n \in \mathbb{N}$, on observe

$$\forall t \in [\alpha;\beta) \quad \|\varphi_n(t)\| \leq \frac{(\beta-\alpha)^n}{n!} \times A^n \times N_\infty^{[\alpha;\beta]}(\varphi_0)$$

donc $\frac{(\beta-\alpha)^n A^n}{n!} N_\infty^{[\alpha;\beta]}(\varphi_0)$ apparaît comme un majorant de $\{\|\varphi_n(t)\| \mid t \in [\alpha;\beta]\}$ qui admet donc une borne supérieure $N_\infty^{[\alpha;\beta]}(\varphi_n)$ qui est son plus petit majorant

donc $0 \leq N_\infty^{[\alpha;\beta]}(\varphi_n) \leq \frac{(\beta-\alpha)^n A^n}{n!} N_\infty^{[\alpha;\beta]}(\varphi_0) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

. La série exponentielle $\sum \frac{(\beta-\alpha)^m A^m}{m!}$ converge (vers $e^{(\beta-\alpha)A}$)

donc par comparaison de séries à termes positifs la série $\sum N_\infty^{[\alpha;\beta]}(\varphi_m)$ converge i.e la série $\sum \varphi_m$ converge normalement sur $[\alpha;\beta]$ donc (F de dimension finie), $\sum \varphi_m$ converge uniformément sur $[\alpha;\beta]$ (et ce pour tout segment $[\alpha;\beta] \subset I$).

② Vérifions que $\tilde{\Psi} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m$ est un point fixe de H

Pour tout $t \in I$,

* la série $\sum \;_m$ converge uniformément sur $[t_0;t]$

* pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\;_m$ est continue sur $[t_0;t]$

* F est un espace vectoriel de dimension finie

donc via le théorème d'intégration sur un segment

$$
\begin{aligned}
(H(\Psi))(t) &= \int_{t_0}^{t} a(s)(\Psi(s))\,ds + \varphi_0(t) \quad \text{a(s) linéaire et continue sur F} \\
&= \int_{t_0}^{t} \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{a(s)(\varphi_m(s))}_{=u_m(s)}\Big) ds + \varphi_0(t) \quad \text{(car F dim. finie)} \\
&= \int_{t_0}^{t} \Big(\sum_{m=0}^{\infty} u_m(s)\Big) ds + \varphi_0(t)
\end{aligned}
$$

Or * F est un espace vectoriel de dimension finie

* pour tout $m \in \mathbb{N}$, $u_m : s \in [t_0;t] \longmapsto a(s)(\varphi_m(s))$ est continue (car a et φ_m le sont, et $(u,\vec{x}) \mapsto u(\vec{x})$ bilinéaire avec F et $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F)$ de dimensions finies).

* pour tout $m \in \mathbb{N}$: $\forall s \in [t_0;t]$ $\|u_m(s)\| \leq |||a(s)||| \, \|\varphi_m(s)\|$

$$\leq N_\infty^{[t;t_0]}(a)\, N_\infty^{[t;t_0]}(\varphi_m)$$

donc $N_\infty^{[t;t_0]}(u_m) \leq N_\infty^{[t;t_0]}(a)\, N_\infty^{[t;t_0]}(\varphi_m)$

Or $\sum N_\infty^{[t;t_0]}(\varphi_m)$ converge donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum N_\infty^{[t;t_0]}(u_m)$ converge d'où (F de dimension finie), $\sum u_m$ converge uniformément sur $[t;t_0]$

ainsi via le théorème d'intégration sur un segment, on obtient

$$H(\tilde{\Psi})(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \underbrace{a(s)(\varphi_m(s))\,ds}_{u_m(s)} + \varphi_0(t)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{m+1}(t) + \varphi_0(t)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(t)$$

$$= \tilde{\Psi}(t) \qquad (\forall t \in I)$$

d'où $H(\tilde{\Psi}) = \tilde{\Psi}$ et $\tilde{\Psi}$ est une solution au problème de Cauchy.

d) unicité de la solution

Dans l'analyse (partie b), on a vu que si Ψ est point fixe de H alors

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad \Psi = \sum_{k=0}^{m} \varphi_k + \rho_{m+1} \qquad (**)$$

Or $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est défini à partir de ρ_0 comme $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ à partir de φ_0 donc on prouve comme en c①:

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad N_\infty^{[\alpha;\beta]}(\rho_m) \leq \frac{(\beta-\alpha)^m \; N_\infty^{[\alpha;\beta]}(\|a\|)}{m!} \times N_\infty^{[\alpha;\beta]}(\rho_0)$$

(pour tout $[\alpha;\beta] \subset I$ $t_0 \in [\alpha;\beta]$)

d'où par comparaison $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur tout segment $[\alpha;\beta] \subset I$ avec $t_0 \in [\alpha;\beta]$

donc $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur I

d'où via $(**)$ $\quad \Psi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k = \tilde{\Psi}$

D'où l'unicité d'un point fixe de H