

## ECHELLE EPAS

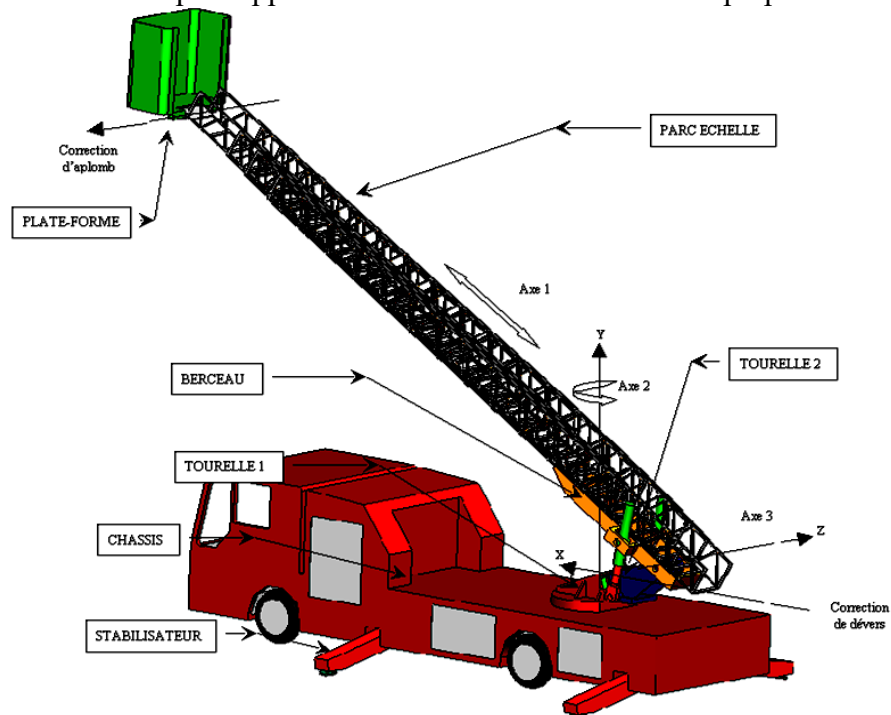
Une E.P.A.S. est une Echelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle. Ce système conçu et commercialisé par la société CAMIVA est monté sur le châssis d'un camion de pompiers et permet de déplacer une plate-forme pouvant recevoir deux personnes et un brancard le plus rapidement possible et en toute sécurité.

Le déplacement de la plate-forme est réalisé suivant trois axes :

- le déploiement du parc échelle (axe 1) : chaque plan de l'échelle peut se translater par rapport aux autres ; seul le quatrième plan d'échelle est solidaire du berceau,
- le pivotement autour de l'axe Y (axe 2) : La tourelle 1 peut pivoter par rapport au châssis autour d'un axe vertical,
- la rotation autour de l'axe Z (axe 3) : Le berceau peut tourner par rapport à la tourelle 2 autour d'un axe horizontal.

Pour garantir la sécurité, le système maintient toujours la plate forme en position horizontale :

- la correction d'aplomb oriente la plate-forme autour d'un axe horizontal parallèle à l'axe Z,
- la correction de devers oriente l'ensemble parc échelle et plate-forme autour de l'axe X,
- la tourelle 2 s'oriente par rapport à la tourelle 1 suivant un axe perpendiculaire aux axes 3 et 2.



### Etude de la vitesse de sortie des vérins

Le système de dressage/abaissement réalise la rotation de la plate-forme autour d'un axe horizontal Z.

**L'objectif** est de déterminer la vitesse de sortie des vérins en fonction des paramètres géométriques fixes et des variables cinématiques de pilotage.

Pour répondre à ce problème, on propose le paramétrage suivant :

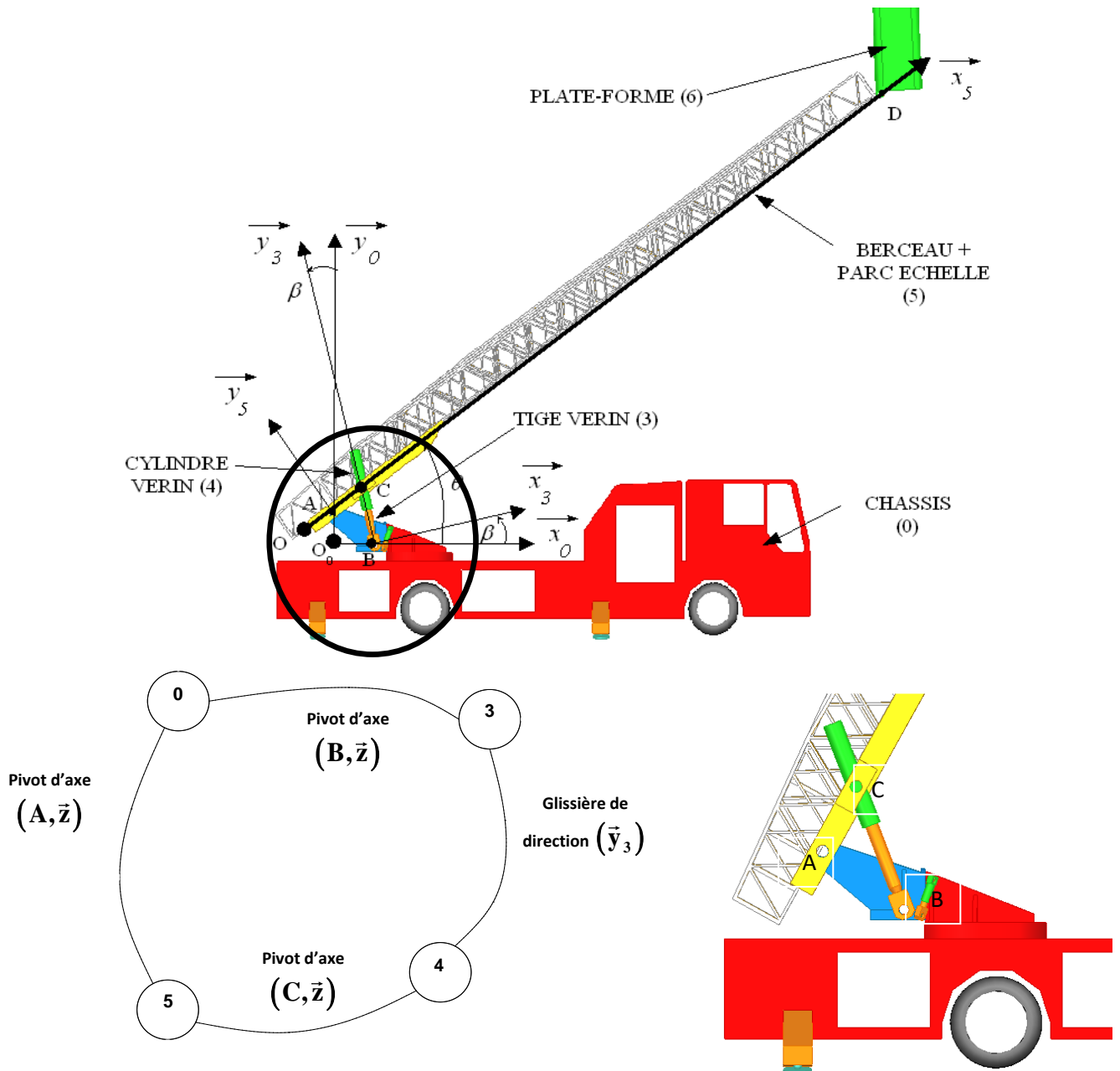
Le repère  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au châssis (0). Le repère  $R_5(A, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$  est lié à l'ensemble {berceau+parc échelle+plate forme} (5+6). Le repère  $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  est lié au vérin composé des ensembles (3) et (4), en mouvement relatif.

On note  $\vec{O_0A} = a\vec{y}_0$ ;  $\vec{AC} = c\vec{x}_5$ ;  $\vec{AD} = H\vec{x}_5$ ;  $\vec{O_0B} = b\vec{x}_0$ ;  $\vec{BC} = r(t)\vec{y}_3$  et  $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$ ;  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_5)$ .

*Hypothèses simplificatrices:*

Dans ce qui suit, afin de simplifier le problème, on supposera qu'il existe une liaison glissière entre la tige (3) de vérin et le cylindre (4) du vérin. On ne prendra donc pas en compte la rotation propre autour de l'axe de la tige du vérin.

Par ailleurs, on supposera qu'il n'existe aucun degré de liberté entre (5) et (6). On notera donc la classe d'équivalence cinématique résultante (5).



**Question 1 :** Tracer le schéma cinématique en projection dans le plan  $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  de cet ensemble.

**Question 2 :** Pour chaque liaison, exprimer le torseur cinématique en fonction des paramètres donnés.

**Question 3 :** Exprimer la vitesse du point D du parc échelle dans son mouvement par rapport au châssis :  $\vec{V}(D \in 5/0)$  en fonction de la vitesse angulaire de dressage  $\dot{\theta}$  et des paramètres géométriques.

**Question 4 :** Exprimer, en écrivant une condition de fermeture de chaîne cinématique, la vitesse de sortie du vérin  $\vec{V}(C \in 4/3)$  en fonction de la vitesse angulaire de dressage  $\dot{\theta}$  et des paramètres géométriques.

**Question 5 :** A partir de la forme proposée du torseur cinématique  $\{V(4/3)\}$  à la question 2 déterminer une relation entre  $(\dot{r}, \dot{\theta}, \beta, \theta, c)$ .

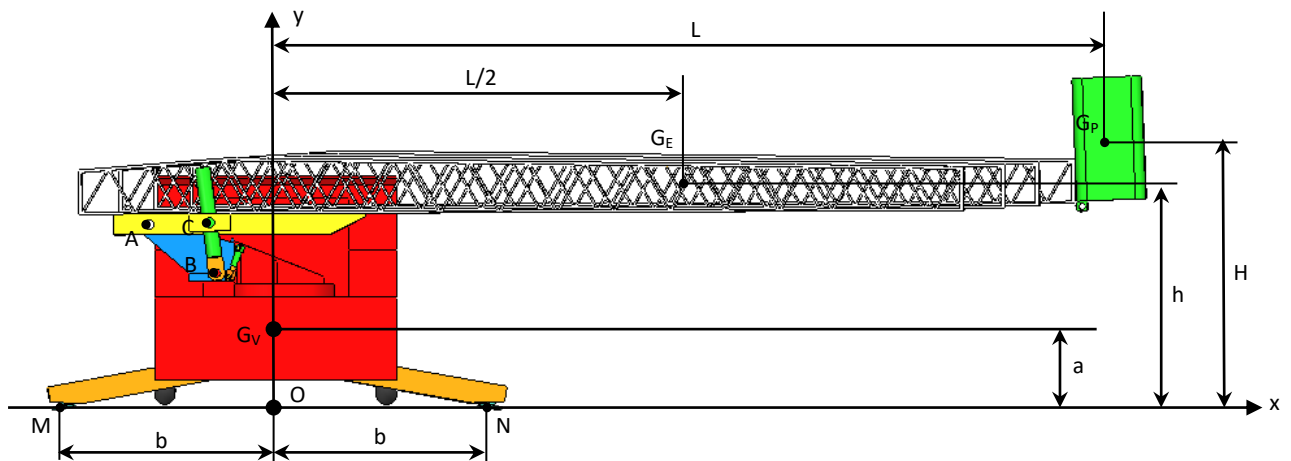
**Question 6 :** A partir d'une fermeture géométrique appliquée au mécanisme, définir 2 relations à valeur scalaire reliant les différents paramètres géométrique entre eux. En déduire l'expression de  $\tan \beta$  en fonction de  $a, b, c,$  et  $\theta$ .

**Question 7 :** A partir des résultats des questions 5 et 6, déterminer la vitesse de sortie des vérins  $(\dot{r})$  en fonction de  $(\dot{\theta}, \theta, c, a, b)$ .

### Etude de la stabilité du véhicule porteur :

Le véhicule porteur de l'E.P.A.S. doit être équipé de stabilisateurs. Une fois en place, les stabilisateurs le soulèvent, afin qu'il ne repose plus sur les roues (les roues touchent le sol mais ne supportent aucun poids) : le mouvement des suspensions du véhicule mettrait en danger sa stabilité.

L'objet de cette partie est de déterminer la longueur de déploiement maximale que le système de sécurité pourra autoriser.



Le véhicule est dans la configuration de la figure précédente :

- Parc échelle horizontale.
- Stabilisateurs sortis au maximum.
- Charge maximale dans la plate-forme.

Le problème sera traité en statique plane dans le plan  $(O\vec{x}\vec{y})$  de la figure précédente.

Les efforts pris en compte sont :

- Les actions de pesanteur sur chaque élément.

Elément	Centre d'inertie	Masse	
Véhicule + charge utile	$G_V$	$m_V$	$\overrightarrow{OG_V} = a \cdot \vec{y}$
Parc échelle	$G_E$	$m_E$	$\overrightarrow{OG_E} = \frac{L}{2} \cdot \vec{x} + h \cdot \vec{y}$
Plate-forme + charge utile	$G_P$	$m_P$	$\overrightarrow{OG_P} = L \cdot \vec{x} + H \cdot \vec{y}$

- Les actions de contact de la route sur les stabilisateurs.

Ces actions seront modélisées par des glisseurs passant l'un par M, tel que  $\overrightarrow{OM} = -b \cdot \vec{x}$  et

l'autre par N tel que  $\overrightarrow{ON} = b \cdot \vec{x}$

Les résultantes de ces glisseurs seront notées respectivement :

$$\vec{R}_M = X_M \cdot \vec{x} + Y_M \cdot \vec{y} \quad \text{et} \quad \vec{R}_N = X_N \cdot \vec{x} + Y_N \cdot \vec{y}$$

### Question 8 :

-a- Exprimez la condition de non basculement de l'ensemble.

-b- Calculez la longueur  $L_{max}$  de déploiement au-delà de laquelle il y aura basculement.

-c- Commentez l'hypothèse (statique plane) faites pour traiter le problème.

### Etude de l'aplomb de la plateforme

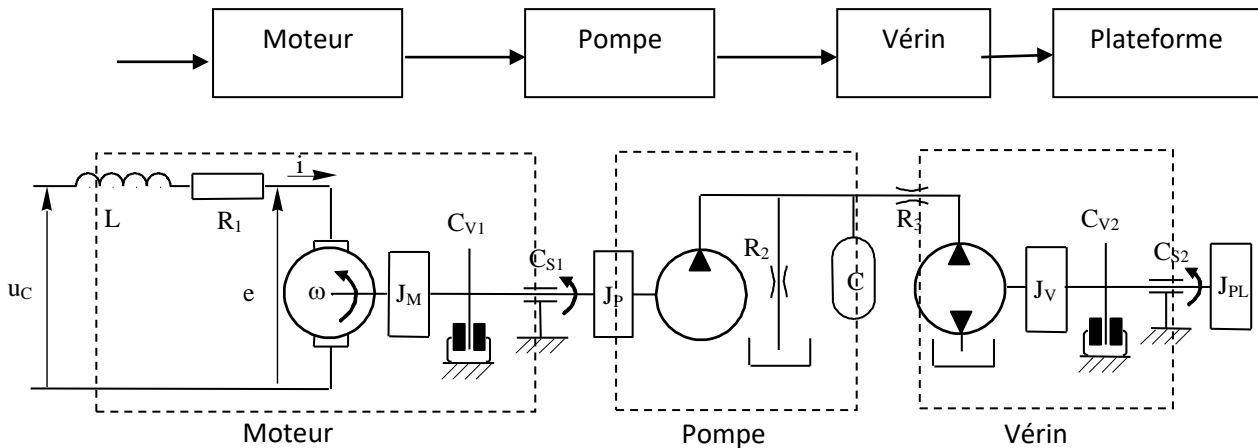
La plateforme est prévue pour recevoir deux personnes et un brancard soit une charge d'environ 270kg. Lors des mouvements de l'échelle, la plateforme doit rester horizontale.

L'échelle étant de longueur variable, l'utilisation de l'énergie hydraulique disponible au niveau du véhicule imposerait de raccorder la plateforme avec des canalisations de longueur variable entre des valeurs très éloignées et avec des pertes de charges importantes.

La solution retenue est donc une chaîne d'action comportant un moteur électrique à courant continu, une pompe hydraulique et deux vérins rotatifs installés directement au niveau de la plateforme.

Pour éviter que les mouvements de la plateforme dus aux flexions de l'échelle résultant de sollicitations dynamiques (entre autres, les mouvements des personnes embarquées) , ne sollicite inutilement le système, la consigne provient d'un capteur donnant l'angle entre l'échelle et l'horizontale. Un potentiomètre installé au niveau de la plateforme donne une image de l'angle qu'elle fait avec le parc échelle.

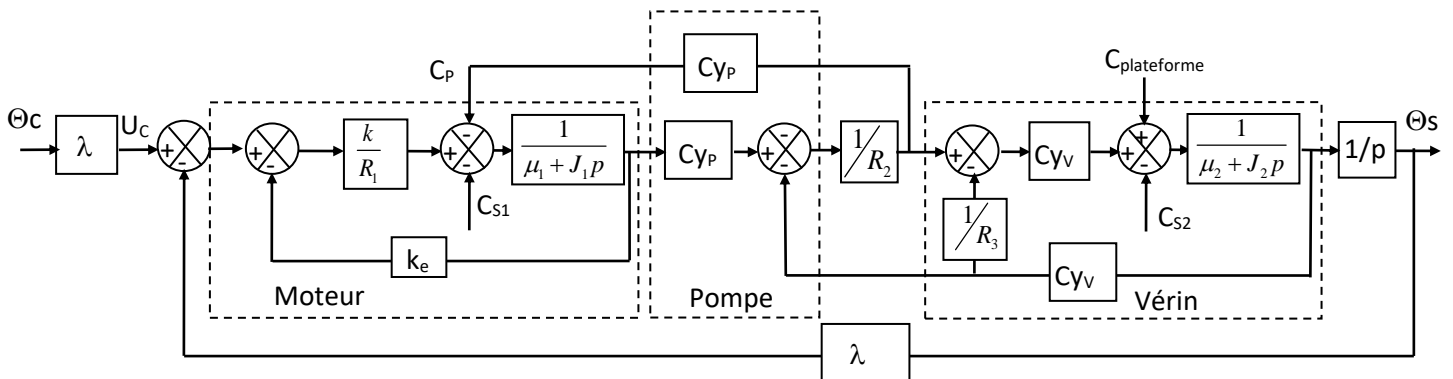
## Modélisation et paramétrage de l'installation



### Hypothèses :

- on néglige l'inductance du moteur électrique ;
- on néglige la compressibilité du fluide et la déformation des contenants du fluide sous pression.

### Schéma fonctionnel (schéma bloc) avec les hypothèses précédentes



### Notations :

$u_c$  : tension de commande.

$R_1$  : résistance électrique de l'induit du moteur.

$e$  : f.c.e.m. du moteur,  $\omega$  sa vitesse de rotation.

$k_e$  : constante électrique du moteur :  $e = k_e \cdot \omega$

$J_1$  : moment d'inertie du moteur et de la pompe ramené sur l'arbre moteur.

$J_2$  : moment d'inertie du vérin et de la plateforme ramené sur l'axe du vérin.

$\mu_1$  et  $\mu_2$  respectivement coefficient de frottement visqueux ( $C_{V1}$  et  $C_{V2}$ ).

$C_{S1}$  : couple de frottement sec de l'ensemble moteur+pompe ramené sur l'arbre moteur.

$C_{S2}$  : couple de frottement sec de l'ensemble vérin+liaison nacelle/échelle ramené sur l'axe du vérin.

$C_{plateforme}$  : moment de l'action mécanique de la plateforme sur l'échelle suivant l'axe de rotation de la plateforme / l'échelle

$C_{Y_P}$ ,  $C_{Y_V}$  respectivement cylindrée de la pompe et du vérin.

**R<sub>2</sub>** coefficient de perte de charge des fuites internes du moteur.

**R<sub>3</sub>** coefficient de perte de charge entre la pompe et le moteur.

**θ<sub>c</sub>** : angle que fait le parc échelle avec l'horizontale

**θ<sub>s</sub>** : angle que fait la plateforme avec le parc échelle.

**Equations et hypothèses utilisées :**

Le moteur est supposé électriquement parfait d'où :

- Couple délivré par le moteur  $C_M = k.i$
- En régime permanent :  $\omega = \frac{u}{k}$

La pompe est supposée hydrauliquement parfaite d'où :

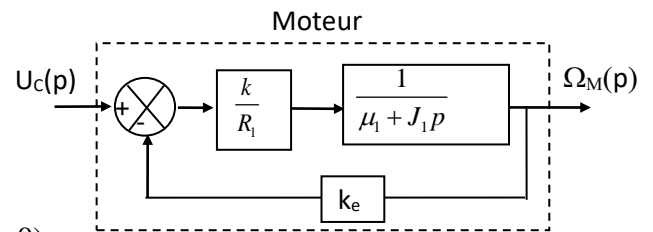
- Couple résistant de la pompe  $C_P = C_{yP} \cdot (P_a - P_b)$
- Débit  $Q_P = C_{yP} \cdot \omega_{pompe}$

Le vérin est supposé hydrauliquement parfait d'où :

- Couple délivré par le vérin  $C_V = C_{yV} \cdot (P_a - P_b)$
- Débit  $Q_V = C_{yV} \cdot \omega_{vérin}$

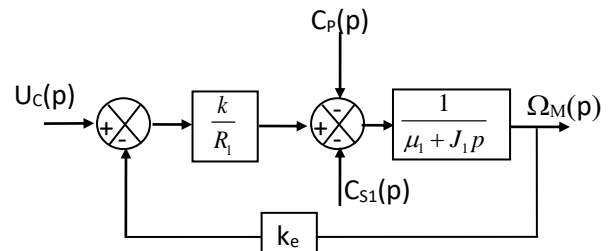
En considérant uniquement le moteur :

- non relié à la pompe ;
- électriquement parfait ;
- en négligeant les frottements ( $\mu_1=0$ ) ;



**Question 9 :** Exprimer la fonction de transfert du moteur  $\frac{\Omega_m(p)}{U_c(p)}$ .

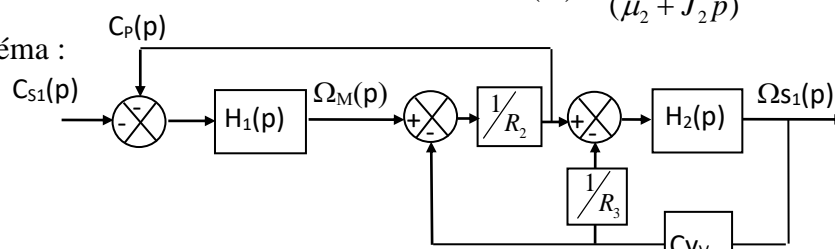
Le fonctionnement du système est perturbé par des frottements secs. Il est possible de modifier la tension de commande pour compenser leurs actions, et obtenir ainsi un système dont le comportement ne soit pas perturbé.



On considère que  $U_C = 0$ .

**Question 10 :** A partir de la figure ci-dessus, déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée :  $H_1(p) = \frac{\Omega_M(p)}{C_{S1}(p) + C_P(p)}$

On prend maintenant  $C_{plateforme} = C_{S2} = 0$ , on pose  $H_2(p) = \frac{C_{yV}}{(\mu_2 + J_2p)}$ , ce qui conduit à considérer le schéma :



**Question 11 :** Déterminer, sans expliciter  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$ , l'expression de  $F_1(p) = \frac{\Omega_{S1}(p)}{C_{S1}(p)}$ .

En prenant  $C_{S1} = C_{S2} = C_{plateforme} = 0$ , on obtient  $F_U(p) = \frac{\Omega_U(p)}{U_C(p)}$ ,

l'expression  $\Omega_S(p) = \Omega_U(p) + \Omega_{S1}(p) = 0$  permet de déterminer la tension de compensation pour  $C_{S1}$

$C_{S2}$  est additionné à  $C_{plateforme}$  qui est de signe constant, d'intensité variable et d'un ordre de grandeur différent. Cette perturbation dépend, de la charge de la plateforme, des mouvements de l'échelle et des mouvements des personnes embarquées. Il n'est donc pas possible de prévoir une compensation complète de cette perturbation, comme cela a été possible pour les frottements au niveau du moteur.

La compensation pourrait prendre en compte  $C_{S2}$  et la valeur moyenne de  $C_{plateforme}$  par exemple.

La difficulté à modéliser, de façon précise le système, a conduit le fabricant à réaliser une série d'essais sur le système réel afin de déterminer les caractéristiques d'un correcteur proportionnel intégral. La fonction de transfert identifiée présente les caractéristiques suivantes :

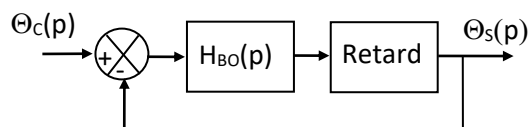
- on observe un retard de 0,2 s.

- on obtient la fonction (sans le retard)  $G(p) = \frac{\Theta_s(p)}{\Theta_c(p)} = \frac{3,24}{p^2 + 3,24p + 3,24}$

Où  $\theta_c$  est l'angle de consigne (angle que fait le parc échelle avec l'horizontale) et  $\theta_s$  l'angle que fait la plateforme avec le parc échelle.

**Question 12 :** Déterminer l'ordre et les caractéristiques de  $G(p)$ .

L'asservissement étant à retour unitaire, il peut être représenté par le schéma suivant :



**Question 13 :** En considérant le retard nul :

-a- Montrer que l'écart statique de ce système est nul.

-b- Déterminer l'expression de  $H_{BO}(p)$ .

**Question 14 :** Donner, en fonction de  $H_{BO}(p)$ , l'expression de  $G_R(p) = \frac{\Theta_s(p)}{\Theta_c(p)}$  transmittance

en boucle fermée avec le retard de 0,2 s

Pour simplifier les applications numériques on prend :  $H_{BO}(p) = \frac{4}{p(p+3,6)}$ .

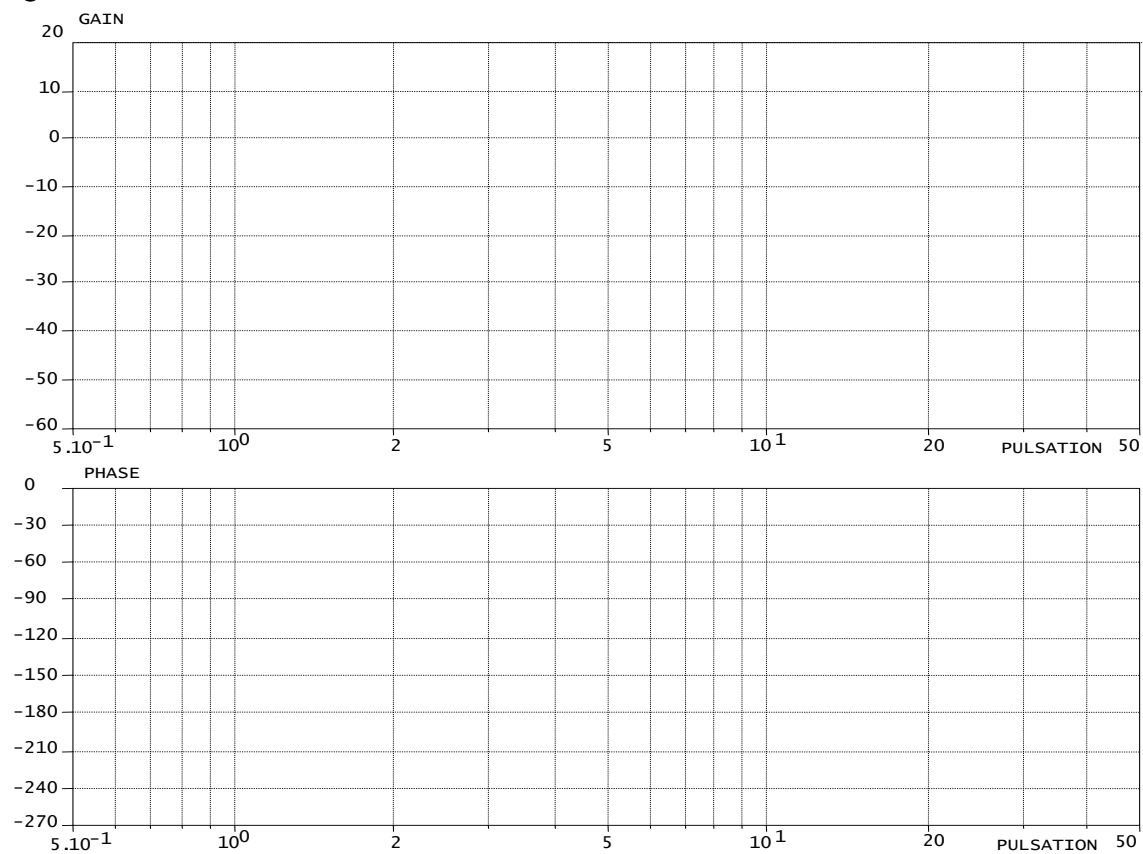
Pendant le dressage de l'échelle le système est soumis à une entrée en rampe de pente 0,1 rd/s

**Question 15 :** Donner la valeur de l'erreur de traînage correspondant à cette entrée, en négligeant le retard.

**Question 16 :** Sur le document réponse, tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de  $H_{BO}(p)$  pour des pulsations comprises entre 0,5 rd/s et 50 rd/s. Indiquer clairement les coordonnées des points intéressants.

### DOCUMENT REPONSE

#### Question 16

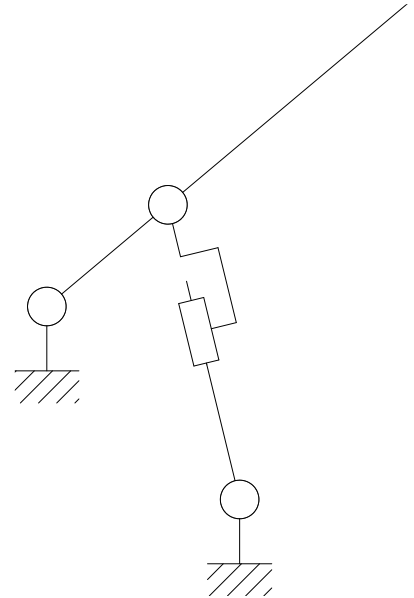




**Éléments de correction**

**Question 1 :** Tracer le schéma cinématique en projection dans le plan  $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  de cet ensemble.

**Question 2 :** Pour chaque liaison, exprimer le torseur cinématique en fonction des paramètres donnés ci dessus. On précisera les calculs (si nécessaires) ainsi que les raisonnements.



$$\{V(3/0)\}_B = \begin{cases} \vec{\Omega}(3/0) = \dot{\beta} \vec{z} \\ \vec{0} \end{cases} \quad \text{liaison pivot d'axe } (\mathbf{B}, \vec{z}) \text{ entre 3 et 0}$$

$$\{V(4/3)\}_B = \begin{cases} \vec{\Omega}(4/3) = \vec{0} \\ \vec{V}(B \in 4/3) = r \vec{y}_3 \end{cases} \quad \text{liaison glissière de direction } (\vec{y}_3) \text{ entre 3 et 4}$$

$$\{V(5/0)\}_A = \begin{cases} \vec{\Omega}(5/0) = \dot{\theta} \vec{z} \\ \vec{V}(A \in 5/0) = \vec{0} \end{cases} \quad \text{liaison pivot d'axe } (\mathbf{A}, \vec{z}) \text{ entre 5 et 0}$$

$$\{V(5/4)\}_C = \begin{cases} \vec{\Omega}(5/4) = \vec{\Omega}(5/0) - \vec{\Omega}(4/3) - \vec{\Omega}(3/0) = (\dot{\theta} - \dot{\beta}) \vec{z} \\ \vec{V}(C \in 5/4) = \vec{0} \end{cases}$$

**Question 3 :** Exprimer la vitesse du point D du parc échelle dans son mouvement par rapport au châssis :  $\vec{V}(D \in 5/0)$  en fonction de la vitesse angulaire de dressage  $\dot{\theta}$  et des paramètres géométriques..

$$\vec{V}(D \in 5/0) = \dot{\theta} \vec{z} \wedge H \vec{x}_5 = H \dot{\theta} \vec{y}_5$$

**Question 4 :** Exprimer, en écrivant une fermeture de chaîne cinématique, la vitesse de sortie du vérin  $\vec{V}(C \in 4/3)$  en fonction de la vitesse angulaire de dressage et des paramètres géométriques.

$$\vec{V}(C \in 4/3) = c \dot{\theta} \cos(\theta - \beta) \vec{y}_3$$

**Question 5 :** A partir de la forme proposée du torseur cinématique  $\{V(4/3)\}$  à la question 4 déterminer une relation entre  $(\dot{r}, \dot{\theta}, \beta, \theta, c)$ .

$$\dot{r} = c \dot{\theta} \cos(\theta - \beta)$$

**Question 6 :** A partir de la fermeture géométrique appliquée au mécanisme ci dessus, définir 2 relations à valeur scalaire reliant les différents paramètres géométrique entre eux.

$$r \sin \beta = b - c \cos \theta$$

$$r \cos \beta = c \sin \theta + a$$

D'où  $\tan \beta = \frac{b - c \cos \theta}{a + c \sin \theta}$

**Question 7 :** A partir des résultats des questions 5 et 6, déterminer la vitesse de sortie des vérins ( $\dot{\mathbf{r}}$ ) en fonction de  $(\dot{\theta}, \theta, \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

$$v = \frac{c \dot{\theta} (a \cos \theta + b \sin \theta)}{\sqrt{(a + c \sin \theta)^2 + (b - c \cos \theta)^2}}$$

**Question 8 :**

-a- Exprimez la condition de non basculement de l'ensemble.

La condition de non basculement de l'ensemble est que la réaction normale du contact avec le sol en M soit positive :  $Y_M > 0$

-b- Calculez la longueur  $L_{max}$  de déploiement au-delà de laquelle il y aura basculement.

$$L_{max} = 2b \frac{m_P + m_E + m_V}{2m_P + m_E}$$

-c- Commentez l'hypothèse (statique plane) faites pour traiter le problème.

L'hypothèse de statique ne permet pas de prendre en compte les effets dynamiques lors de la sortie du parc échelle. Le basculement risque de se produire avant cette condition limite.

**Question 9 :** Exprimer la fonction de transfert du moteur  $\frac{\Omega_m(p)}{U_c(p)}$

$$\frac{\Omega_M(p)}{U_C(p)} = \frac{k}{kk_e + R_1 J_1 p}$$

**Question 10 :** A partir de la figure ci-dessus, déterminer dans le cadre des hypothèses

l'expression de la transmittance en boucle fermée :  $H_1(p) = \frac{\Omega_M(p)}{C_{SI}(p) + C_P(p)}$

D'où la fonction de transfert ou transmittance en boucle fermée demandée :

, soit  $H_1(p) = \frac{-R_1}{kk_e + R_1 \mu_1 + R_1 J_1 p}$

**Question 11 :** Déterminer, sans expliciter  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$ , l'expression de  $F_1(p) = \frac{\Omega_{SI}(p)}{C_{SI}(p)}$ .

$$C_P(p) = \frac{-H_1(p)H_2(p)R_3}{H_1(p)(R_3 + H_2(p)C_{yV}) + H_2(p)R_3C_{yV} + R_2(R_3 + H_2(p)C_{yV})}$$

**Question 12 :** Déterminer l'ordre et les caractéristiques de  $G(p)$ .

On met  $G(p)$  sous forme canonique : 
$$G(p) = \frac{\theta_s(p)}{\theta_c(p)} = \frac{3,24}{p^2 + 3,24p + 1} = \frac{1}{1 + p + \frac{p^2}{1,8^2}}$$

On identifie donc un système du second ordre de gain statique unitaire, de pulsation propre non amortie  $\omega_0 = 1,8 \text{ rad.s}^{-1}$ , de facteur d'amortissement  $\xi = 0,9$

**Question 13 :** En considérant le retard nul :

-a- Montrer que l'écart statique de ce système est nul.  
Le gain statique étant unitaire, l'écart statique sera nul.

-b- Déterminer l'expression de  $H_{BO}(p)$ .

$$H_{BO} = \frac{1}{p \left( 1 + \frac{p}{3,24} \right)}$$

**Question 14 :** Donner, en fonction de  $H_{BO}(p)$ , l'expression de  $G_R(p) = \frac{\Theta_s(p)}{\Theta_c(p)}$  transmittance

en boucle fermée avec le retard de 0,2 s

$$G_R(p) = \frac{H_{BO}(p)e^{-0,2p}}{1 + H_{BO}(p)e^{-0,2p}}$$

**Question 15 :** Donner la valeur de l'erreur de traînage correspondant à cette entrée, en négligeant le retard.

$$\varepsilon_t = \frac{0,36}{4} = 0,09 \text{ rad} \approx 5,15^\circ$$

**Question 16 :** Sur le document réponse, tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de  $H_{BO}(p)$  pour des pulsations comprises entre 0,5 rd/s et 50 rd/s. Indiquer clairement les coordonnées des points intéressants.

$$H_{BO}(p) = \frac{4}{p(p + 3,6)} = \frac{10/9}{p} \frac{1}{\left( 1 + \frac{p}{3,6} \right)} = H(p) \cdot H'(p)$$

C'est une fonction de transfert correspondant à un premier ordre (gain statique = 1 et constante de temps = 1/3,6 s) (noté  $H'(p)$ ), multiplie par un intégrateur de gain 10/9 noté  $H(p)$

**Diagramme asymptotique de gain en décibel pour  $H'(p)$**

Droite horizontale à 0dB jusqu'à  $\omega = 3.6 \text{ rad.s}^{-1}$  puis droite de pente -20dB/décade

**Diagramme asymptotique de gain en décibel pour  $H(p)$**

Droite de pente -20 dB/décade qui passe par le point (0dB, 10/9 rad.s<sup>-1</sup>)

**Diagramme asymptotique phase pour  $H'(p)$**

Droite horizontale à 0° jusqu'à  $\omega = 3.6 \text{ rad.s}^{-1}$  puis droite horizontale à -90°

**Diagramme asymptotique de gain en décibel pour  $H(p)$**

droite horizontale à -90°

