Physique

Fiche – Incertitudes expérimentales

L. Torterotot

« La notion d'incertitude est essentielle dans la démarche expérimentale. Sans elle, on ne peut juger de la qualité d'une mesure, de sa pertinence ou de sa compatibilité avec une loi physique. » [1]

1 Vocabulaire et définitions

Mesurande ici noté X, c'est la grandeur à déterminer.

Mesurage action de déterminer une valeur du mesurande par une expérience.

Grandeur d'influence grandeur qui n'est pas le mesurande, mais qui a un effet sur le mesurage.

Estimateur L'estimateur d'une grandeur X se note $\hat{X}$ et permet d'évaluer X à partir des mesures x_i.

Incertitude de mesure $u(X)$ est une *évaluation* de l'écart-type σ_X (ou de la dispersion) de l'ensemble des grandeurs raisonnablement attribuables au mesurande.

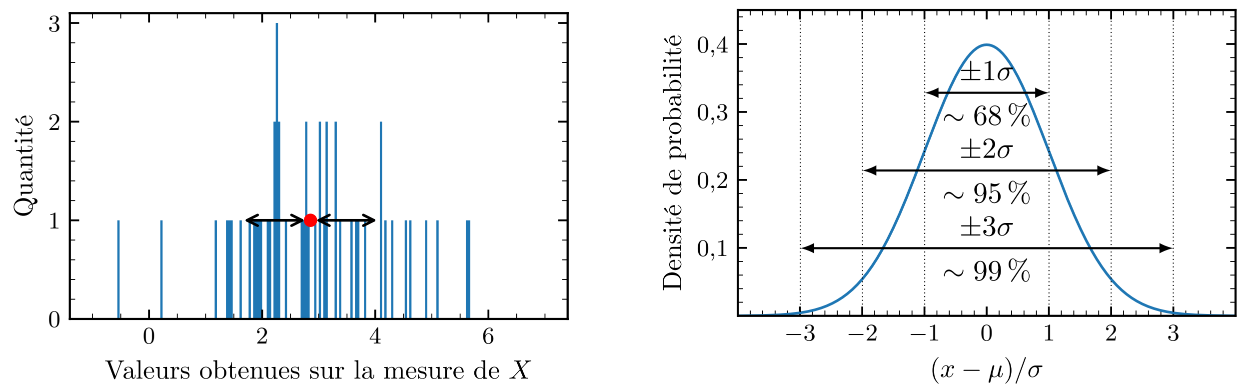
Incertitude absolue $u(X)$, s'exprime dans les mêmes unités que X.

Incertitude relative $\frac{u(X)}{X}$ représente l'importance de l'erreur par rapport à la grandeur mesurée. L'incertitude relative est sans unité et s'exprime en général en pour-cent ($100u(X)/X$).

2 Variabilité d'une mesure et incertitude-type

Une mesure physique donne un résultat variable (figure 1a). Cette variabilité est quantifiée par une incertitude-type. L'estimation de cette incertitude-type se fait différemment selon le cas :

- Si la mesure peut être réalisée plusieurs fois, il est possible de faire un traitement statistique $\rightarrow$ incertitude de type A ;
- Si la mesure ne peut être réalisée qu'une fois ou que la variabilité est plus faible que la tolérance du dispositif de mesure $\rightarrow$ incertitude de type B ;
- Si le résultat est obtenu à partir d'autres grandeurs dont les incertitudes respectives sont connues $\rightarrow$ incertitude composée.



(a) *Dispersion des mesures d'une grandeur X de moyenne $\overline{X} = 2{,}85$ (point rouge) et d'écart-type $\sigma_s = 1{,}27$ (largeur d'une double flèche).*

(b) *Cas d'une distribution suivant la loi normale.*

Figure 1

Il est possible que la distribution des mesurages suive la *loi normale*. Dans ce cas, la probabilité d'obtenir une valeur lors d'une mesure est donnée par une *gaussienne* (figure 1b), définie par une moyenne μ et un écart-type σ,

$$G_{\mu\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\mu\sigma}(x)\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

Alors, le niveau de confiance ou probabilité p pour une valeur x mesurée de se trouver à moins de $t\sigma$ de la moyenne μ de cette gaussienne est de :

$$p = \int_{\mu-t\sigma}^{\mu+t\sigma} G_{\mu\sigma}(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 68\,\% \text{ pour } t=1 \\ 95\,\% \text{ pour } t=2 \\ 99\,\% \text{ pour } t=3 \end{cases}$$

Ainsi, si un processus suit la loi normale, statistiquement, 68 % des valeurs mesurées (environ 2 sur 3) se trouvent dans l'intervalle $[\mu-\sigma;\mu+\sigma]$.

3 Écart normalisé ou *z-score*

L'écart normalisé E_N entre deux processus de mesure donnant les valeurs X_1 et X_2 et d'incertitudes types $u(X_1)$ et $u(X_2)$ est défini par

$$\boxed{E_\mathrm{N} = \frac{|X_1 - X_2|}{\sqrt{u(X_1)^2 + u(X_2)^2}}}\,.$$

Par convention, deux résultats sont considérés compatibles si $E_\mathrm{N} \leqslant 2$.

Il est possible d'interpréter E_N de la façon suivante. Soit $\delta = X_1 - X_2$ l'écart entre X_1 et X_2. L'incertitude sur δ vaut alors $u(\delta) = \sqrt{u(X_1)^2 + u(X_2)^2}$ (voir partie 6). Ainsi,

$$E_\mathrm{N} = \frac{\delta}{u(\delta)}\,,$$

c'est-à-dire que l'écart normalisé donne le nombre d'incertitudes-type séparant 0 de δ. Si ce nombre est trop grand, 0 n'est pas compatible avec δ et donc X_1 et X_2 ne sont pas compatibles.

4 Estimation de l'incertitude de type A (statistique)

L'incertitude-type est estimée à partir de l'écart-type de la distribution des données issues de la répétition de la mesure. La meilleure estimation $\hat{X}$ du mesurande X est la moyenne arithmétique $\overline{X}$ sur les N mesures effectuées. Alors,

$$\hat{X} = \overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\,.$$

Soient σ_s l'écart type *de la série de mesures* et $\overline{\sigma}$ l'écart type *de la moyenne*. Leurs estimations $\hat{\sigma}_\mathrm{s}$ et $\hat{\overline{\sigma}}$ à partir des N mesures réalisées sont

$$\hat{\sigma}_\mathrm{s} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{X} - x_i\right)^2}, \qquad \hat{\overline{\sigma}} = \frac{\hat{\sigma}_\mathrm{s}}{\sqrt{N}}\,.$$

L'*incertitude-type* sur $\overline{X}$ vaut $\overline{\sigma}$, c'est-à-dire $\boxed{u(\overline{X}) = \hat{\overline{\sigma}}}$.

5 Estimation de l'incertitude de type B (probabiliste)

Certaines expériences n'ont pas de variabilité observée. Il faut alors estimer l'incertitude à partir de toutes les informations disponibles sur la variabilité possible du mesurande.

Mesure avec une tolérance $\pm\Delta_{\text{tol}}$ Lorsqu'une mesure d'une grandeur x est faite avec une tolérance Δ_{tol}, la mesure est contenue dans l'intervalle $[x-\Delta_{\text{tol}}, x+\Delta_{\text{tol}}]$ avec une distribution de probabilité uniforme. L'incertitude-type est alors estimée par l'écart-type de cette distribution,

$$u(x)_{\text{tol}} = \frac{\Delta_{\text{tol}}}{\sqrt{3}}\,.$$

Exemple : incertitude sur la mesure d'un volume à la pipette jaugée.

Mesure sur des graduations de pas Δ_{grad} La mesure est plus ou moins précise selon les capacités d'évaluation de l'expérimentateur. Le choix de la distribution de probabilité de la valeur mesurée est alors plus discutable. Le choix le plus naturel est de prendre une distribution uniforme sur une division car il est généralement possible de déterminer la mesure dans un intervalle $[(n-\frac{1}{2})\Delta_{\text{grad}}, (n+\frac{1}{2})\Delta_{\text{grad}}]$. Il s'agit alors d'une mesure avec une tolérance égale à une demie graduation. Ainsi, l'estimation est

$$u(x)_{\text{grad}} = \frac{\Delta_{\text{grad}}}{2\sqrt{3}}\,.$$

Exemple : incertitude sur la mesure d'une longueur avec une règle.

Affichage digital ou grandeur numérisée Avec des appareils numériques, les notices donnent généralement l'incertitude constructeur Δ_{cons} sous la forme $p\,\% + \ell$ digits où « digits » signifie *least significant digits*. Cela signifie qu'il faut prendre la somme de $p\,\%$ de la valeur affichée et de ℓ le dernier chiffre significatif affiché puis diviser par le facteur d'élargissement k annoncé par la notice pour obtenir l'incertitude-type $u(x)_{\text{cons}}$ qui s'estime alors par

$$u(x)_{\text{cons}} = \frac{\Delta_{\text{cons}}}{k} = \frac{1}{k}\left(x\frac{p}{100} + \ell \text{ digits}\right)\,.$$

Exemple : incertitude sur la mesure d'une tension au multimètre.

L'incertitude constructeur Δ_{cons} dépend du calibre sur lequel l'appareil est réglé. Plus le calibre est petit, plus la mesure est précise. Il y a donc tout intérêt à utiliser systématiquement le plus petit calibre permettant de réaliser la mesure afin de réduire l'incertitude.

6 Incertitude totale, incertitude composée

Il s'agit d'obtenir l'incertitude-type *totale* $u(y)$ sur le mesurande y qui dépend des grandeurs mesurées x_i, respectivement associées à une incertitude-type $u(x_i)$. C'est par exemple le cas avec une concentration en espèce chimique obtenue à partir d'un titrage : y correspond alors à la concentration recherchée, et les x_i au volume équivalent, au volume initial et à la concentration de la solution titrante.

Incertitudes indépendantes Lorsque les grandeurs d'entrée x_i sont *indépendantes*, l'incertitude-type composée de y est obtenue par la formule de propagation des incertitudes-type,

$$u(y) = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 u(x_i)^2}\,.$$

Les deux formules suivantes sont à connaître.

Cas d'une somme $y = ax_1 + bx_2$

$$\boxed{u(y) = \sqrt{(a\,u(x_1))^2 + (b\,u(x_2))^2}}\,.$$

Incertitudes non indépendantes Lorsque les incertitudes ne sont pas indépendantes, il n'est en général pas possible de déterminer l'incertitude réelle. En revanche, l'incertitude totale est *bornée*,

$$u(y) \leqslant \sum_i \left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right| u(x_i)\,.$$

Cas d'un produit $y = x_1^a x_2^b$

$$\boxed{\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{a\,u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{b\,u(x_2)}{x_2}\right)^2}}\,.$$

Simulation et méthode de Monte-Carlo À l'aide d'un processus aléatoire simulé informatiquement, des distributions de mesures sont obtenues connaissant les incertitudes sur chacune d'entre elles. Ces mesures sont combinées pour obtenir une distribution de valeurs pour le résultat final. L'incertitude-type découle directement de l'écart-type de cette dernière distribution.

7 Écriture du résultat

Le résultat de la mesure s'écrit sous la forme

$$\boxed{X = \left(\hat{X} \pm u(\hat{X})\right) \text{ unité}}$$

où $u(\hat{X})$ l'estimation de l'incertitude sur $\hat{X}$. Il n'est donc pas pertinent d'écrire un résultat avec une plus grande précision sur $\hat{X}$ que sur $u(\hat{X})$. Sans perdre d'information, il est aussi plus lisible d'écrire

$$X = 5{,}02 \pm 0{,}21 \qquad \text{et non} \qquad \xcancel{X = 5{,}022\,637 \pm 0{,}21}\,.$$

Il convient de respecter les règles suivantes :

— le dernier chiffre significatif de l'écriture de la valeur de $\hat{X}$ doit se trouver à la même position, c'est-à-dire correspondre à la même puissance de dix, que le dernier de l'incertitude $u(\hat{X})$;

— l'incertitude $u(\hat{X})$ s'écrit avec deux chiffres significatifs [5] ;

— si l'incertitude n'est pas demandée, le résultat a autant de chiffres significatifs que la moins précise des grandeurs utilisées pour la calculer ;

— il y a autant de chiffres significatifs pour une valeur que de chiffres significatifs après la virgule de son logarithme.

Références

[1] F.-X. Bally & J.-M. Berroir. « Incertitudes expérimentales ». *BUP* **928** (nov. 2010).

[2] M. Champion. « Mesures et incertitudes ». *Physique MPI**. Lycée Thiers. Marseille, 2023. URL : http://www.mchampion.fr/cours/TP%20-%20Mesures%20et%20incertitudes.pdf.

[3] *Évaluation des données de mesure : Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure*. 1re éd. Bureau international des poids et mesures. Sept. 2008. URL : http://www.bipm.org/fr/publications/guides/gum.html.

[4] M. Fruchart & coll. *Physique expérimentale*. De Boeck, 2016.

[5] B. Hall. « Rounding the expanded uncertainty ». *Accreditation and Quality Assurance* **24** (2019), p. 369-373. DOI : 10.1007/s00769-019-01400-z.