SÉRIES NUMÉRIQUES

Cours

Dans tout ce chapitre, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de nombres complexes.

I. Définitions et premières propriétés

Définition 1

- On appelle *série de terme général* u_n et on note $\sum u_n$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

  Pour $n \in \mathbb{N}$, le nombre S_n est appelé *la somme partielle d'indice n.*

- On dit que *la série* $\sum u_n$ *converge* lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
  Dans ce cas, on appelle *somme de la série* $\sum u_n$ et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

  On dit que *la série* $\sum u_n$ *diverge* lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

- **Attention aux notations !**

$\sum_{k=0}^{n} u_k$	$\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ou $\sum u_n$	$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
Somme partielle d'indice n (n est fixé)	Série de terme général u_n : la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$	Somme de la série (si convergence) : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$

Notons que la somme de la série n'a de sens qu'en cas de convergence.
Toutefois, pour une série à termes **positifs** divergente, comme $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$, on peut écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

- Une série peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang $p \in \mathbb{N}$. On la note alors $\sum_{n\geqslant p} u_n$.

Exemple 1 : Étudier la nature des séries $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et $\sum_{n\geqslant 2} e^n$ et calculer leur somme en cas de convergence.

Rappel sur les sommes géométriques finies

Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant q$.

On a $\displaystyle\sum_{n=p}^{q} z^n = \begin{cases} \dfrac{z^p - z^{q+1}}{1-z} & \text{si } z \neq 1 \\ q-p+1 & \text{si } z = 1. \end{cases}$

- La nature d'une série ne dépend pas :

  - de son premier terme — Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, les séries $\displaystyle\sum_{n \geqslant p} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant q} u_n$ sont de même nature.

  - des constantes multiplicatives non nulles — Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature. En particulier, $\sum u_n$ et $\sum(-u_n)$ sont de même nature.

Notons cependant qu'en cas de convergence, la somme de la série dépend du premier terme et des éventuelles constantes multiplicatives.

Définition 2 (*Reste d'une série convergente*)

Hyp. On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle *reste d'indice n* (ou *d'ordre n*) le nombre $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Si on note $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S = S_n + R_n$.

Proposition 3

Hyp. On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

La suite des restes $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition 4 (*Séries complexes*)

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent.

- Ce résultat peut être utilisé pour ramener l'étude d'une série de nombres complexes à l'étude de deux séries de nombres réels.

II. Plan d'étude

A. Reconnaît-on une série usuelle ?

Proposition 5 (*Séries de Riemann*)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple 2 : Preuve du cas $\alpha = 1$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
2. En déduire que la *série harmonique* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Proposition 6 (*Séries géométriques*)

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- La série $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$.
- Si $|z| < 1$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} z^n = \frac{z^p}{1-z}$.

On notera qu'en particulier, si $|z| < 1$ alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Proposition 7 (*Série exponentielle*)

Soit $z \in \mathbb{C}$.
La série $\displaystyle\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

B. Le terme général tend-il vers 0 ?

Théorème 8

Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite (u_n) converge vers 0.

Par contraposée :

Si la suite (u_n) ne converge pas vers 0 alors la série $\sum u_n$ diverge.
On dit dans ce cas qu'elle *diverge grossièrement*.

▸ Attention, il existe des séries divergentes dont le terme général tend vers 0.
Par exemple, la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$.

Par conséquent :

Si le terme général ne tend pas vers 0 alors on conclut à la divergence grossière de la série.

S'il tend vers 0 alors on ne peut pas conclure sur la nature de la série et il faut poursuivre l'étude.

▸ Pour étudier la convergence du terme général, on pourra penser à utiliser les équivalents ou les développements limités.

Exemple 3 : Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} n\sin\frac{1}{n}$.

C. Peut-on calculer la suite des sommes partielles ?

▸ Notons que parmi toutes les méthodes proposées ici, c'est la seule qui permet le calcul de la somme de la série en cas de convergence.

Exemple 4 : Prouver la *Proposition 6* (*Séries géométriques*).

Théorème 9 (*Télescopage*)

- On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_0$.
- La série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge.

▸ En cas de convergence d'une série télescopique, un passage à la limite dans la relation ci-dessus permet d'obtenir la somme de la série : $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0$.

▸ Ce théorème peut aussi être utile pour étudier une suite en se ramenant à l'étude d'une série télescopique.

Exemple 5 : Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2-1}$ et préciser leur somme.

D. Le terme général est-il de signe constant à partir d'un certain rang ?

Pour répondre à cette question, on pourra pour simplifier chercher un équivalent de u_n car si $u_n \sim v_n$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même signe à partir d'un certain rang.

1. Le terme général est de signe constant

Les résultats ci-dessous sont énoncés avec l'hypothèse « la série $\sum u_n$ est à *termes positifs* ».

Si la série que l'on étudie est à *termes négatifs*, on peut considérer la série $\sum(-u_n)$.

En effet, la série $\sum(-u_n)$ est alors à termes positifs et elle est de même nature que la série $\sum(-u_n)$.

Théorème 10

Hyp. On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant 0$.

On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles.

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
De plus, en cas de divergence, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et on autorise la notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Pour une série à termes positifs, la notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ a donc toujours un sens et on a l'équivalence :

$$\sum u_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n < +\infty.$$

On peut noter de plus qu'avec les conventions, on a toujours $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \operatorname*{Sup}\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

Exemple 6 : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. Montrer que la série $\sum u_{2n}$ converge.

Les paragraphes suivants découlent de ce théorème.

a) Critères de comparaison

Dans le tableau ci-dessous, (u_n) et (v_n) désignent deux suites réelles.

Comparaison par	Hypothèses	Conclusion
Équivalent	$\boxed{1}$ $u_n \sim v_n$ $\boxed{2}$ À partir d'un certain rang, $v_n \geqslant 0$ $\boxed{3}$ $\sum v_n$ converge (respectivement diverge)	$\sum u_n$ converge (resp. diverge)
Négligeabilité « petit o » Domination « grand O »	$\boxed{1}$ $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$ $\boxed{2}$ À partir d'un certain rang, $v_n \geqslant 0$ $\boxed{3}$ $\sum v_n$ converge	$\sum u_n$ converge (absolument)
	$\boxed{1}$ $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$ $\boxed{2}$ À partir d'un certain rang, $v_n \geqslant 0$ $\boxed{3}$ $\sum u_n$ diverge	$\sum v_n$ diverge
Inégalité	$\boxed{1}$ À partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ $\boxed{2}$ À partir d'un certain rang, $u_n \geqslant 0$ $\boxed{3}$ $\sum v_n$ converge	$\sum u_n$ converge
	$\boxed{1}$ À partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ $\boxed{2}$ À partir d'un certain rang, $u_n \geqslant 0$ $\boxed{3}$ $\sum u_n$ diverge	$\sum v_n$ diverge

- Pour utiliser un critère de comparaison, on notera qu'il y a toujours **3 hypothèses** à vérifier :
  $\boxed{1}$ l'hypothèse de comparaison qui porte sur les termes généraux (attention, pas de somme ici !),
  $\boxed{2}$ l'hypothèse de positivité (attention à ne pas l'oublier),
  $\boxed{3}$ l'hypothèse de la nature d'une des deux séries.

- On notera qu'il y a un ordre à respecter sauf pour la comparaison par équivalent où, une fois les deux premières hypothèses vérifiées, on peut conclure que les deux séries sont de même nature.

Exemple 7 : On compare souvent aux séries de Riemann. Prouver la *règle* $n^\alpha u_n$.

- ⋆ S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$ alors la série $\sum u_n$ converge.
- ⋆ S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \pm\infty$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple 8 : Déterminer la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\arctan n}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right)$.

b) Règle de d'Alembert

Théorème 11 (*Règle de d'Alembert*)

Hyp. On suppose que :

$\boxed{1}$ à partir d'un certain rang, $u_n > 0$,

$\boxed{2}$ on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ (limite finie ou infinie).

Si $\ell < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge et si $\ell > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

- Si $\ell = 1$ ou si la limite n'existe pas alors on ne peut pas conclure.

Par exemple, les séries de Riemann donnent toutes une limite égale à 1 alors que certaines convergent et d'autres divergent.

- Attention de ne pas oublier de vérifier la stricte positivité de la suite.

- La règle de d'Alembert est particulièrement efficace lorsque le terme général contient des puissances ou des factorielles.

Exemple 9 : Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n n!}{n^n}$.

Exemple 10 : Prouver la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n!}$ lorsque $x \geqslant 0$ (sans utiliser la *Proposition 7*).

c) Méthode de comparaison Série/Intégrale

La méthode présentée ci-dessous peut permettre de déterminer la nature d'une série à termes positifs.

Elle permet plus généralement d'obtenir un $\boxed{\textit{encadrement d'une somme dont le terme général s'écrit } u_n = f(n) \textit{ avec } f \textit{ une fonction monotone}}$ et peut avoir diverses applications (estimation d'une somme, obtention d'un équivalent de la suite des restes en cas de convergence, obtention d'un équivalent de la suite des sommes partielles en cas de divergence, etc...)

On notera que suivant l'objectif recherché, il n'est pas forcément nécessaire d'avoir des termes de signe constant.

Lemme 12

Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction continue sur $[p, +\infty[$.

- Si f est décroissante sur $[p, +\infty[$ alors on a :

$$\forall k \geqslant p,\quad f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k).$$

- Si f est croissante sur $[p, +\infty[$ alors on a :

$$\forall k \geqslant p,\quad f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k+1).$$

- *Illustration graphique*

Technique de comparaison Série/Intégrale

1. On applique le lemme.
2. On somme entre deux bornes bien choisies. On applique la relation de Chasles au centre et on calcule l'intégrale. On fait apparaître la quantité qui nous intéresse à gauche et à droite.
3. On remet la quantité qui nous intéresse au centre de l'encadrement.
4. On termine le raisonnement pour répondre à la question posée.

- *Intérêt :* On a davantage d'outils pour calculer des intégrales (primitives, intégration par parties, changement de variables...) que pour calculer des sommes.

Exemple 11 :

1. Prouver la *Proposition 5* (*Séries de Riemann*).
2. Donner un équivalent de la suite des restes d'une série de Riemann dans le cas $\alpha > 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k$.
   Déterminer un équivalent de la suite (u_n).

2. Le terme général n'est pas de signe constant

a) Convergence absolue

Définition 13

On dit que *la série* $\sum u_n$ *converge absolument* ou que *la suite* (u_n) *est sommable* lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

- *Intérêt :* Lorsqu'on étudie la convergence absolue, on se ramène à l'étude d'une *série à termes positifs* ce qui permet d'utiliser les résultats vus précédemment.

- On pourra en particulier penser à étudier la convergence absolue lorsque le terme général contient des sinus/cosinus ou pour étudier une série complexe (la notation $|.|$ désigne dans ce cas le module).

Théorème 14

Si la série $\sum u_n$ converge absolument alors elle converge.

- Attention, il existe des séries convergentes qui ne convergent pas absolument.

Par exemple, la série harmonique alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ (cf. ci-dessous).

Par conséquent :

Si la série $\sum u_n$ converge absolument alors elle converge.

Si la série $\sum u_n$ ne converge pas absolument alors on ne peut pas conclure sur la nature de la série et il faut poursuivre l'étude.

Exemple 12 : Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin n}{n^2}$ et $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$ (sans utiliser la *Proposition 7*).

b) Séries alternées

Définition 15

Une série de nombres réels est dite *alternée* lorsque son terme général change alternativement de signe.
En d'autres termes, la série $\sum u_n$ est alternée si et seulement s'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n v_n \quad \text{ou} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^{n+1} v_n.$$

- Notons que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme ci-dessus alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = |u_n|$.

- Attention, une série dont le terme général s'écrit $(-1)^n v_n$ n'est pas nécessairement alternée !

Il faut bien penser à vérifier que la suite (v_n) est *de signe constant.*

Théorème 16 (*Théorème spécial des séries alternées ou critère de Leibniz*)

Hyp. On suppose que :

$\boxed{1}$ la série $\sum u_n$ est alternée,

$\boxed{2}$ la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,

$\boxed{3}$ la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Alors la série $\sum u_n$ converge et de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{la somme } \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \text{ est du signe de son premier terme } u_n \text{ et vérifie } \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_n|.$$

Exemple 13 : Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge.

Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

▸ Attention, si la série $\sum u_n$ est alternée mais que la suite $(|u_n|)$ n'est pas décroissante alors on ne peut pas conclure sur la nature de la série et il faut poursuivre l'étude. Par contre, si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 alors on peut conclure que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

▸ Pour prouver la décroissance de la suite $(|u_n|)$, on pourra, en plus des méthodes habituelles de comparaison de deux termes successifs, penser à utiliser les résultats suivants :

- ⋆ Le produit de deux suites décroissantes positives est une suite décroissante.
- ⋆ Si f est une fonction décroissante alors la suite $(f(n))$ est décroissante.

▸ Notons que sous les hypothèses du théorème, on dispose d'une majoration de l'erreur faite en estimant la somme S de la série par la somme partielle S_n :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |S - S_n| = |R_n| \leqslant |u_{n+1}|.$$

En particulier, pour $\varepsilon > 0$ fixé, si n est choisi tel que $|u_{n+1}| \leqslant \varepsilon$ alors $|S - S_n| \leqslant \varepsilon$ et donc S_n est une valeur approchée de S à ε près.

Exemple 14 :

1. Justifier l'existence et donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.
2. Exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.
3. En déduire une valeur approchée de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ en précisant une majoration de l'erreur commise.

c) Utilisation d'un développement asymptotique

Le résultat suivant peut être utile pour déterminer la nature d'une série dont le terme général s'écrit comme une somme.

Proposition 17

Soit (u_n) et (v_n) deux suites complexes.

- ▸ Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors la série $\sum(u_n + v_n)$ converge.
- ▸ Si la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge alors la série $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

Attention, si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent toutes les deux alors on ne peut pas conclure sur la nature de la série $\sum(u_n + v_n)$.

Utilisation d'un développement asymptotique

Si on a $u_n \sim v_n$, la nature de la série $\sum v_n$ est connue mais la suite (v_n) n'est pas de signe constant alors on ne peut pas conclure par comparaison. On peut penser à faire un développement asymptotique de u_n pour se ramener à une somme de termes pour lesquels la nature des séries est connue.

Exemple 15 : Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Pour conclure, on notera l'importance de connaître le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (convergence vers 0, équivalent, développement asymptotique) pour étudier la série $\sum u_n$.

III. Compléments

A. Manipulation des sommes de séries

Proposition 18 (*Linéarité*)

Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$.
Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors la série $\sum(\lambda u_n+\mu v_n)$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n+\mu v_n)=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\mu\sum_{n=0}^{+\infty}v_n.$$

Soit (u_n) une suite de nombres complexes.
On rappelle que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent.
Dans ce cas, on a de plus $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{Re}(u_n)+i\mathrm{Im}(u_n))=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Re}(u_n)+i\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Im}(u_n)$
et par conséquent :

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Re}(u_n)\text{ et }\mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Im}(u_n).$$

Proposition 19 (*Croissance*)

Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leqslant v_n$ et les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}v_n.$$

Proposition 20 (*Inégalité triangulaire*)

Si la série $\sum u_n$ converge absolument alors on a $\left|\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|$.

Retenir que lorsqu'on manipule des sommes de séries, il faut impérativement vérifier que toutes les séries en jeu convergent.

On veut écrire	*On doit vérifier que*
$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$	$\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent
$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Re}(u_n)=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)$	$\sum u_n$ converge (ou $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent)
$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Im}(u_n)=\mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)$	$\sum u_n$ converge (ou $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent)
$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$ sachant que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\leqslant v_n$	$\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent
$\left\lvert\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right\rvert\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\lvert u_n\rvert$	$\sum \lvert u_n\rvert$ converge

B. Produit de Cauchy

Définition 21

Le *produit de Cauchy* de deux séries $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0}v_n$ est la série $\sum_{n\geqslant 0}w_n$ où pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$w_n=\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2\,/\\ p+q=n}}u_pv_q=\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}.$$

Exemple 16 : Calculer le produit de Cauchy de la série $\sum_{n\geqslant 0}x^n$ (où $x\in\mathbb{R}$) avec elle-même et le produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}$.

Théorème 22

Hyp. On suppose que les séries $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0}v_n$ convergent absolument.
Alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0}w_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}w_n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\right).$$

- On pourra penser à utiliser ce résultat lorsqu'on étudie une série dont le terme général est défini à l'aide d'une somme ou lorsqu'on cherche à calculer le produit de deux sommes de séries.

Exemple 17 : Prouver la convergence et déterminer la somme de la série de terme général $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2 2^{n-p}}$ pour $n\geqslant 1$ (on admettra $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$).

Exemple 18 : Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ avec $|x|<1$, la série $\sum_{n\geqslant 1}nx^{n-1}$ converge et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

▸ Attention, il existe des séries convergentes dont le produit de Cauchy diverge.
Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont seulement convergentes alors on ne peut pas conclure sur la nature de leur produit de Cauchy.

Exemple 19 : Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge mais le produit de Cauchy de cette série avec elle-même diverge.

C. Formule de Stirling

Théorème 23 (*Formule de Stirling*)

On a :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Exemple 20 : Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.