DEVOIR MAISON 1 - *Sur les polynômes*

À rendre le lundi 16 septembre

Exercice 1 - Étude d'une forme linéaire

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.
Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que $\mathscr{B} = (1, X-1, X(X-1), \dots, X^{n-1}(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. (a) Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de φ.
3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t)\mathrm{d}t.$$
   (a) Justifier que l'application ψ est linéaire.
   (b) Démontrer que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, X^2, \dots, X^{n+1})$.
   (c) Démontrer que : $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), \dots, X^n(X-1))$.
   (d) Donner alors une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
4. On note $\mathscr{H} = \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.
   (a) Donner la dimension de $\mathscr{H}$.
   (b) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, soit ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.
   Démontrer que la famille $(\psi_0, \dots, \psi_n)$ est une base de $\mathscr{H}$.
   (c) Déterminer les composantes de φ dans cette base.

Exercice 2 - Une suite d'Appell

Pour un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, noté parfois également $P(X)$, on note $P(X+1)$ le polynôme obtenu en substituant l'indéterminée X de P par $X+1$.
À titre d'exemple, si $P(X) = X^2 - 3X + 7$ alors $P(X+1) = (X+1)^2 - 3(X+1) + 7 = X^2 - X + 5$.
On pourra admettre que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, les polynômes P et $P(X+1)$ ont le même degré et si P n'est pas le polynôme nul, le même coefficient dominant.

Dans toute cette partie, on considère un entier naturel n fixé.

A. Étude d'un endomorphisme

On note φ_n l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi_n : P \mapsto 2P(X) - P(X+1)$.

1. Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que φ_n est injectif.
3. En déduire qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $2P(X) - P(X+1) = X^n$.
   Dans toute la suite du problème, on note P_n cet unique polynôme.

B. Étude de la suite (P_n)

On rappelle que, par définition, le polynôme P_n vérifie $2P_n(X) - P_n(X+1) = X^n$.

1. Justifier que $\deg P_n = n$.
2. Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 0} \dfrac{k^n}{2^k}$ converge.

   Dans la suite, on note $F_n = \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{k^n}{2^k}$.
3. Justifier que $\dfrac{k^n}{2^k} = \dfrac{P_n(k)}{2^{k-1}} - \dfrac{P_n(k+1)}{2^k}$ pour tout entier naturel k et en déduire que $P_n(0) = F_n$.
4. Montrer que $P'_{n+1} = (n+1)P_n$.
5. En utilisant la formule de Taylor pour les polynômes, montrer que

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{n-k} X^k.$$

Exercice 3 - Polynômes scindés sur $\mathbb{R}$

Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est dit *scindé sur* $\mathbb{R}$ lorsqu'il peut s'écrire comme un produit de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré 1.

Soit P un polynôme à cœfficients réels de degré $n \in \mathbb{N}^*$.
On pourra utiliser (sans démonstration) les équivalences entre les assertions suivantes.

(i) Le polynôme P est scindé sur $\mathbb{R}$.
(ii) Le polynôme P admet n racines réelles comptées avec leurs multiplicités.
(iii) Si z est une racine complexe de P alors $z \in \mathbb{R}$.

On notera que P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples lorsque P admet n racines réelles distinctes.

1. Les polynômes $X^3 - 1$ et $X^3 - 2X^2 + X$ sont-ils scindés sur $\mathbb{R}$?

   Dans toute la suite, P désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

2. On pose $Q(X) = X^n P(1/X)$ ce qui signifie que Q est la fonction $x \mapsto x^n P\big(1/x\big)$.
   (a) Montrer que Q est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Préciser son degré et son cœfficient dominant.
   (b) Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ alors Q est scindé sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que si P admet au moins $n-1$ racines réelles (non nécessairement distinctes) alors P est scindé sur $\mathbb{R}$.

4. (a) Énoncer le théorème de Rolle.
   (b) Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples alors P' est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

5. (a) Si α est une racine de P de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$, que sait-on sur α en tant que racine de P' ?
   (b) Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ alors P' est scindé sur $\mathbb{R}$.
   Aide à la rédaction : On pourra noter $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les racines réelles distinctes de P rangées dans l'ordre croissant et $m_1, \ldots, m_p$ leurs multiplicités respectives.
   (c) *Application :* Le polynôme $X^6 - X + 1$ est-il scindé sur $\mathbb{R}$?