Exercices

Exercice 1. Montrer que $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupe de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ puis déterminer son image et son noyau.

Exercice 2. Soit G un groupe, on appelle centre de G, et on note $C(G)$, l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les éléments du groupe. C'est à dire :

$$C(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G, xy = yx\}.$$

1. Montrer que $C(G)$ est un sous-groupe de G.
2. Soit $n \geqslant 3$, montrer que le centre du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ est réduit à $\{\mathrm{id}\}$.
   Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 3. Le but de cet exercice est de déterminer tous les morphismes du groupe symétrique d'ordre n $(S_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.
Soit φ un morphisme de $(S_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

1. Montrer que pour toute transposition τ, $\varphi(\tau) \in \{-1, 1\}$.
2. Montrer que pour tout $k \in [\![2\,;n]\!], \varphi(1\ k) = \varphi(1\ 2)$.
3. Montrer que pour toute transposition $\tau, \varphi(\tau) = \varphi(1\ 2)$.
4. En déduire φ.
5. Conclure.

Exercice 4. Un sous-groupe H d'un groupe $(G, \cdot)$ est dit distingué lorsque :

$$\forall x \in H, \forall a \in G, axa^{-1} \in H.$$

1. Montrer que le noyau d'un morphisme de groupes au départ de $(G, \cdot)$ est distingué.
2. Soit H un sous-groupe de $(G, \cdot)$ distingué et K un sous-groupe de $(G, \cdot)$.
   Montrer que l'ensemble

   $$HK = \{xy;\ \text{avec } x \in H, y \in K\}$$

   est un sous-groupe de $(G, \cdot)$.

Exercice 5. Soit G un groupe cyclique de cardinal n.

1. Montrer que tous les sous-groupes de G sont cycliques.
2. Soit d un diviseur de n. Montrer que G possède un unique sous-groupe de cardinal d.

Exercice 6. Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Pour $a \in G$, on note $f_a : G \longrightarrow G, x \mapsto axa^{-1}$.

1. Montrer que pour tout $a \in G$, f_a est un automorphisme de G.
2. Montrer que $\varphi : (G, \cdot) \longrightarrow (\mathrm{Aut}(G), \circ), a \mapsto f_a$ est un morphisme de groupes.
3. Déterminer le noyau de φ.

Exercice 7. Soit G un groupe commutatif, a et b des éléments de G d'ordres respectifs m et n.

1. Montrer que si $m \wedge n = 1$, alors ab est d'ordre mn.
2. Qu'en est-il si G n'est pas supposé commutatif ?

Exercice 8. Théorème de Lagrange
Soit G un groupe fini de cardinal n et H un sous-groupe de G.

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur G par :

   $$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

   est une relation d'équivalence.
2. Montrer que $Hx = \{hx;\ \text{avec } h \in H\}$ est la classe d'équivalence de x.
3. Soit $x \in G$ fixé et $f : H \longrightarrow Hx, h \mapsto hx$.
   Montrer que f est bijective.
4. Montrer que toutes les classes d'équivalence ont le même cardinal.
5. Montrer que $\mathrm{Card}(H) \mid n$.
6. Montrer que l'ordre de tout élément de G divise le cardinal n du groupe G.

Exercice 9. Montrer que tout groupe dont le cardinal est premier est un groupe cyclique et préciser ses éléments générateurs.

Exercice 10. Les groupes $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 11. Soit p un nombre premier, on note :

$$\mathcal{G}_p = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{N}, z^{(p^k)} = 1 \right\}$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note :

$$V_k = \mathbb{U}_{p^k} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z^{(p^k)} = 1 \right\}.$$

1. (a) Montrer que V_k est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dont on précisera le cardinal.
   (b) Montrer que la suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante pour l'inclusion.
2. (a) Montrer que $\mathcal{G}_p = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k$.
   (b) Montrer que $\mathcal{G}_p$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
3. Montrer que si $z \in V_{k+1} \setminus V_k$, alors z est générateur de V_{k+1}.
4. Soit H un sous-groupe de $\mathcal{G}_p$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N}, H \neq V_k$.
   (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, H \not\subset V_k$.
   Indication : on pourra raisonner par l'absurde.
   (b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, V_k \subset H$.
   (c) En déduire que les sous-groupes propres de $\mathcal{G}_p$ sont cyclique et qu'aucun d'entre eux n'est maximal pour l'inclusion.
5. Montrer que $\mathcal{G}_p$ n'est pas engendré par une partie finie.