TD 1b / Réponses à l'autotest sur le calcul asymptotique

1) Définitions de base

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites numériques.
On suppose que u_n et v_n sont non nuls à partir d'un certain rang (toujours vrai en pratique).

- $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ quand $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
« u_n est équivalent à v_n quand $n \to \infty$ « signifie que u_n se comporte « approximativement » comme v_n quand n est « grand ».
- $u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ quand $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
« u_n est négligeable devant v_n quand $n \to \infty$ » signifie que u_n est « très petit » devant v_n quand n est « grand ».
- $u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ quand la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ est bornée.
« u_n est dominée par v_n quand $n \to \infty$ » signifie que u_n est « contrôlé » par v_n quand n est « grand ».

Les implications suivantes sont vraies :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \implies u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$$
$$\text{et} \qquad u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}(v_n) \implies u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}(v_n).$$

Les deux réciproques sont fausses.

2) Équivalents usuels

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 \qquad \mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$
$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$
$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$
$$\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 \qquad \cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$
$$\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$
$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$
$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 \qquad \mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$
$$\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

et si $\alpha \in \mathbb{R}$ est un exposant **constant :**

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} 1 \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$$

Plus général : si f est dérivable en a et que $\boxed{f'(a) \neq 0}$:

$$f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a).(x-a).$$

Par exemple, au voisinage de $a = 0$:

$$\arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \arccos(x) - \tfrac{\pi}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -x, \quad \arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

3) Il est possible qu'une suite soit équivalente à (resp. négligeable devant, dominée par) une constante **à condition que cette constante soit non nulle.**

Si a est une constante réelle ou complexe **non nulle** :

- $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} a \iff u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$
- $u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}(a) \iff u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}(1) \iff u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- $u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}(a) \iff u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}(1) \iff$ la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est bornée

4) Changements de variable

$$\begin{cases} f(X) \underset{X\to a}{\sim} g(X) \\ u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \end{cases} \implies f(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} g(u_n)\ ;$$
$$\begin{cases} f(X) \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}\big(g(X)\big) \\ u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \end{cases} \implies f(u_n) \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}\big(g(u_n)\big)\ ;$$
$$\begin{cases} f(X) \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}\big(g(X)\big) \\ u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \end{cases} \implies f(u_n) \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}\big(g(u_n)\big).$$

5) Règles de calculs sur les équivalents

- *Opérations sans danger :* produit, quotient, passage à un exposant **constant**, valeur absolue.
- *Opérations interdites :* somme, différence (**même** voire **surtout** d'une constante), application de l'exponentielle ou d'un exposant variable (bêtises garanties !), application du logarithme (mais conjecture exacte si les expressions tendent vers 0^+ ou $+\infty$), plus généralement application de toute autre fonction (composition interdite).

6) Comparaisons basiques

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle ou complexe.

- $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est un infiniment petit quand $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Cela peut s'écrire : $u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}(1)$.
- $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est un infiniment grand quand $|u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
Cela peut s'écrire : $1 \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}(u_n)$.

7) Croissances comparées pour les suites

Soit α, β deux exposants **strictement positifs,**
q une raison **strictement supérieure à 1**.

Ces conditions sont là pour garantir que les suites étudiées sont toutes des infiniment grands.

Alors : $\dfrac{q^n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \qquad \dfrac{\ln^\beta(n)}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\dfrac{q^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \dfrac{n^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Ces limites permettent de classer les infiniment grands du plus « faible » au plus « fort » :

$$\ln^\beta(n) \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}(n^\alpha) \quad n^\alpha \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}(q^n) \quad q^n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}(n!) \quad n! \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}(n^n).$$

8) Aller-retour entre ∼ et o

On a : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \iff u_n = v_n + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$.

Une suite est équivalente à (v_n) *si et seulement si* elle peut s'écrire comme la somme de v_n et d'une expression négligeable devant v_n.

- Le sens ⇒ est utile quand on est tenté de sommer des équivalents (ce qui est interdit en principe).
- Le sens ⇐ est utile pour calculer un équivalent d'une somme de deux termes (ou davantage).

9) Règles de calcul sur les o et les O

Avec α une constante non nulle :

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\big(\mathrm{o}(u_n)\big) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(u_n) \qquad \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(u_n) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\big(|u_n|\big)$$

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(\alpha\,.\,u_n) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(u_n) \qquad \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(u_n) + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(u_n) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(u_n)$$

$$u_n \times \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(v_n) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(u_n \times v_n) \qquad \frac{\underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(u_n)}{v_n} = \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$$

$$u_n = \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \implies \frac{1}{v_n} = \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{u_n}\right)$$

Toutes les règles ci-dessus sont valables en remplaçant partout o par O.

Liens entre o, O et ∼

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(u_n) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{O}}(u_n) \quad \textbf{mais} \quad \underset{n\to\infty}{\mathrm{O}}(u_n) \neq \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(u_n) \quad \text{en général ;}$$

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \implies \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(u_n) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \ \text{ et } \ \underset{n\to\infty}{\mathrm{O}}(u_n) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{O}}(v_n)$$

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\big(\mathrm{O}(u_n)\big) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(u_n) \quad \text{et} \quad \underset{n\to\infty}{\mathrm{O}}\big(\mathrm{o}(u_n)\big) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(u_n).$$

10) Peut-on éliminer les constantes en facteur ?

Les constantes multiplicatives (non nulles) :

- doivent être conservées dans les équivalents ;
- sont sans importance devant ou à l'intérieur des o et des O : on les élimine toujours.

11) Développements limités usuels

► **Famille de $\dfrac{1}{1-x}$:**

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}\big(x^4\big)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}\big(x^4\big)$$

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}\big(x^4\big)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}\big(x^4\big)$$

$$\arctan x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}\big(x^4\big)$$

► **Exposants :**

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}\big(x^4\big)$$

► **Famille de l'exponentielle :**

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\big(x^4\big)$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\big(x^4\big)$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \tfrac{1}{3!}x^3 + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\big(x^4\big)$$

$$\cos(x) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\big(x^4\big)$$

$$\sin(x) = x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\big(x^4\big)$$

$$\tan(x) = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}\big(x^4\big)$$

Tous ces DL se généralisent naturellement aux ordres supérieurs ***sauf*** *celui de tangente, qui est plus compliqué (par exemple, le terme de degré 5 est $\frac{2}{15}x^5$).*

► **Développements limités « au sens fort »**

Dans tous les développements limités ci-dessus, on peut remplacer $\underset{x\to0}{\mathrm{o}}\big(x^4\big)$ par $\underset{x\to0}{\mathrm{O}}\big(x^5\big)$ sans ajouter de terme.

On obtient alors des « DL au sens fort », qui sont un peu plus précis, **sans aucun coût de calcul supplémentaire.**

12) Opérations sur les DL

- **peu coûteux :** sommes, différences, dérivation, primitivation (attention à l'ordre pour les 2 derniers).
- **un peu plus coûteux :** produit.
- **coûteux (sauf aux petits ordres) :** composition = changement de variable.
- **très coûteux (sauf aux petits ordres) :** quotient = $\frac{1}{1+X}$ + composition + produit = rhâââââ...