TD 1a / Corrigé des exercices 1 à 4

► 1 Équivalents simples

1) Équivalent de $\ln\left(1+\frac{2}{n^3}\right)$:

$$\begin{cases} \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \\ \frac{2}{n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \ln\left(1+\tfrac{2}{n^3}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \tfrac{2}{n^3}.$$

2) Équivalent de $\ln\left(1+e^{1/n}\right)$:

$$\ln\left(1+e^{1/n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln(2) \neq 0$$

$$\text{donc} \quad \ln\left(1+e^{1/n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(2).$$

3) Équivalent de $e^{1/n^2}-1$:

$$\begin{cases} e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \\ \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad e^{1/n^2}-1 \underset{n\to\infty}{\sim} \tfrac{1}{n^2}.$$

4) Équivalent de $\exp\left(\sin(1/n)\right)$:

$$\exp\left(\sin(1/n)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq 0 \ \text{ donc } \ \exp\left(\sin(1/n)\right) \underset{n\to\infty}{\sim} 1.$$

5) Équivalent de $\sqrt{1+n^3}$:

$$1+n^3 \underset{n\to\infty}{\sim} n^3 \quad \text{donc} \quad \sqrt{1+n^3} \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{n^3} = n^{3/2}.$$

6) Équivalent de $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}}-1$:

On a : $\quad \forall n \geqslant 1, \quad u_n := \dfrac{1}{\sqrt{1+\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}} - 1 = \left(1+\sin\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right)^{-1/2} - 1.$

Or : $\begin{cases} (1+x)^{-1/2} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}x \\ \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$

donc $\quad u_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right).$

De plus : $\begin{cases} \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \\ \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$ donc $\quad u_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$

7) Équivalent de $\sqrt{1+e^{1/\ln(n)}}$:

$$\sqrt{1+e^{1/\ln(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2} \neq 0$$

$$\text{donc} \quad \sqrt{1+e^{1/\ln(n)}} \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2}.$$

► 2 Équivalents et opérations (sommes, produits, quotients, exposants)

1) Équivalent de $\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\ln(n)-e^n+n^4$:

$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad$ et $\quad e^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

donc $\quad \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \underset{n\to\infty}{o}(e^n).$

De plus, par croissances comparées :

$$\ln(n) = \underset{n\to\infty}{o}(e^n) \quad \text{et} \quad n^4 = \underset{n\to\infty}{o}(e^n).$$

Ainsi : $\quad \sin\left(\frac{1}{n}\right)+\ln(n)-e^n+n^4 = -e^n + \underset{n\to\infty}{o}(e^n) \underset{n\to\infty}{\sim} -e^n.$

2) Équivalent de $\left(1+\mathrm{sh}(n)\right)(e^n-1)$:

- $1+\mathrm{sh}(n) = 1+\dfrac{e^n+e^{-n}}{2} = \dfrac{e^n}{2} + \underset{n\to\infty}{o}(e^n) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{e^n}{2}.$
- $e^n - 1 = e^n + \underset{n\to\infty}{o}(e^n) \underset{n\to\infty}{\sim} e^n.$

En conclusion : $\quad \left(1+\mathrm{sh}(n)\right)(e^n-1) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{e^n}{2}\times e^n = \dfrac{e^{2n}}{2}.$

3) Équivalent de $\sqrt{\ln(n)-1-\frac{2}{n}}$:

$$\ln(n)-1-\tfrac{2}{n} = \ln(n) + \underset{n\to\infty}{o}\left(\ln(n)\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$$

$$\text{donc} \quad \sqrt{\ln(n)-1-\tfrac{2}{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\ln(n)}.$$

4) Équivalent de $\dfrac{(2+e^{-n})\sin(n)}{(1+n)^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$:

- $2+e^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \neq 0 \quad$ donc $\quad 2+e^{-n} \underset{n\to\infty}{\sim} 2.$
- $1+n \underset{n\to\infty}{\sim} n.$

Donc, comme α est un exposant **constant :**

$$\frac{(2+e^{-n})\sin(n)}{(1+n)^\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2\sin(n)}{n^\alpha}.$$

5) Équivalent de $\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\tan\left(\frac{1}{n}\right)$:

Reformulons l'expression :

$$\begin{aligned} \forall n \geqslant 1, \quad \sin(1/n) - \tan(1/n) &= \sin(1/n) - \frac{\sin(1/n)}{\cos(1/n)} \\ &= \sin(1/n)\left[1 - \frac{1}{\cos(1/n)}\right] \\ &= \sin(1/n) \times \frac{\cos(1/n)-1}{\cos(1/n)}. \end{aligned}$$

Puisque $1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, en utilisant les équivalents usuels :

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad \cos(x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} -\tfrac{x^2}{2},$$

on obtient :

$$\sin(1/n) - \tan(1/n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n} \times \frac{-1/(2n^2)}{1} = -\frac{1}{2n^3}.$$

C'est plus simple avec les développements limités !

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \tfrac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)\\ \tan(x) &= x + \tfrac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)\\ \text{donc}\quad \sin(x)-\tan(x) &= -\tfrac{1}{2}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right).\\ &\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{2}.\end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par changement de variable :

$$\boxed{\sin\left({}^{1}/{}_{n}\right) - \tan\left({}^{1}/{}_{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^3}.}$$

▶ 3 Une limite incontournable !

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. On cherche la limite de $u_n := \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$.
Comme $\alpha/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, à partir d'un certain rang, $1+\frac{\alpha}{n} > 0$ et on peut écrire :

$$u_n = \exp\left(n \ln\left(1+\tfrac{\alpha}{n}\right)\right).$$

Toujours parce que $\alpha/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$:

$$\begin{aligned} n\ln\left(1+\tfrac{\alpha}{n}\right) &\underset{n\to\infty}{\sim} n\times\tfrac{\alpha}{n} = \alpha,\\ \text{donc :}\quad n\ln\left(1+\tfrac{\alpha}{n}\right) &\xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha.\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to\alpha]{} \mathrm{e}^\alpha$, par composition de <u>**limites**</u> **:**

$$u_n = \exp\left(n\ln\left(1+\tfrac{\alpha}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^\alpha.$$

Conclusion. $\boxed{\forall\,\alpha\in\mathbb{R} :\quad \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^\alpha.}$

Remarques. Il y a d'autres rédactions possibles, mais deux points sont à garder à l'esprit :

- Ici, l'écriture de la puissance sous forme exponentielle est **incontournable,** car l'exposant n est **variable.**
- **Il ne faut <u>à aucun prix</u> passer à l'exponentielle dans un équivalent !** C'est très tentant ici, et on a tendance à le faire implicitement si on se précipite.

▶ 4 Équivalents un peu plus subtils

1) Équivalent de $\ln(n^2+1)$:

$$\begin{aligned}\ln(n^2+1) &= \ln\left(n^2 + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(n^2\right)\right) = \ln\left(n^2\times\left(1+\underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(1)\right)\right)\\ &= \underbrace{2\ln(n)}_{\to+\infty} + \underbrace{\ln\left(1+\underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(1)\right)}_{\to 0}\\ &= 2\ln(n) + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(\ln(n)\right)\\ &\underset{n\to\infty}{\sim} 2\ln(n).\end{aligned}$$

2) Équivalent de $\ln\left(\frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{sh}(n)}\right)$:

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{sh}(n)} &= \frac{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}}{2}\times\frac{2}{\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{-n}}\\ &= \frac{\mathrm{e}^n\times(1+\mathrm{e}^{-2n})}{\mathrm{e}^n\times(1-\mathrm{e}^{-2n})}\\ &= \frac{1+\mathrm{e}^{-2n}}{1-\mathrm{e}^{-2n}}\\ &= 1+\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-2n}}{1-\mathrm{e}^{-2n}}-1\right)\\ &= 1+\frac{2\,\mathrm{e}^{-2n}}{1-\mathrm{e}^{-2n}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{donc :}\quad \ln\left(\frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{sh}(n)}\right) &= \ln\left(1+\underbrace{\frac{2\,\mathrm{e}^{-2n}}{1-\mathrm{e}^{-2n}}}_{\to 0}\right)\\ &\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2\,\mathrm{e}^{-2n}}{1-\mathrm{e}^{-2n}}\\ &\underset{n\to\infty}{\sim} 2\,\mathrm{e}^{-2n}.\end{aligned}$$

3) Équivalent de $\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right)^{n^2}-1$:

Pour tout entier $n\geqslant 0$, on a :

$$\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right)^{n^2}-1 = \exp\left(n^2\ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right)\right)-1.$$

Mais, puisque $\mathrm{e}^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$:

$$n^2\ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} n^2\,\mathrm{e}^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CC}} 0.$$

Dans l'équivalent $\mathrm{e}^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, on peut donc effectuer le changement de variable $x \leftarrow n^2\ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right)$:

$$\begin{aligned}\exp\left(n^2\ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right)\right)-1 &\underset{n\to\infty}{\sim} n^2\ln(1+\mathrm{e}^{-n})\\ &\underset{n\to\infty}{\sim} n^2\,\mathrm{e}^{-n}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\boxed{\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right)^{n^2}-1 \underset{n\to\infty}{\sim} n^2\,\mathrm{e}^{-n}.}$