- Exercice Hebdomadaire n^{o} 1 -

1. Compléter, en justifiant, par "il faut", "il suffit" ou "il faut et il suffit" :
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour que n^3 soit impair, ... d'avoir n impair.
2. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Montrer, en rédigeant par Analyse-Synthèse, que : $\exists! x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $\dfrac{x+1}{2x-1} = y$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3$ noté aussi $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$.

   Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
4. **[facultatif]** ***Inégalité Arithmético-Géométrique***
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, ..., x_{2^n} \in \mathbb{R}_+$. Montrer que : $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{2^n} x_k\right)^{1/2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} x_k$
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence d'un entier naturel k tel que $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$. Montrer que : $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leqslant \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$