TD 1a / Corrigé des exercices 1 à 7

► 1 Équivalents simples

1) Équivalent de $\ln\left(1+\frac{2}{n^3}\right)$:

$$\begin{cases} \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \\ \frac{2}{n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \ln\left(1+\frac{2}{n^3}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}.$$

2) Équivalent de $\ln\left(1+e^{1/n}\right)$:

$$\ln\left(1+e^{1/n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln(2) \neq 0$$

$$\text{donc} \quad \ln\left(1+e^{1/n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(2).$$

3) Équivalent de $e^{1/n^2}-1$:

$$\begin{cases} e^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x \\ \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad e^{1/n^2}-1 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

4) Équivalent de $\exp\left(\sin(1/n)\right)$:

$$\exp\left(\sin(1/n)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq 0 \quad \text{donc} \quad \exp\left(\sin(1/n)\right) \underset{n\to\infty}{\sim} 1.$$

5) Équivalent de $\sqrt{1+n^3}$:

$$1+n^3 \underset{n\to\infty}{\sim} n^3 \quad \text{donc} \quad \sqrt{1+n^3} \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{n^3} = n^{3/2}.$$

6) Équivalent de $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}}-1$:

On a : $\forall n \geqslant 1,\quad u_n := \dfrac{1}{\sqrt{1+\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}}-1$

$$= \left(1+\sin\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right)^{-1/2}-1.$$

Or : $\begin{cases} (1+x)^{-1/2}-1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}x \\ \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$

donc $\quad u_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right).$

De plus : $\begin{cases} \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \\ \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$ donc $\quad u_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$

7) Équivalent de $\sqrt{1+e^{1/\ln(n)}}$:

$$\sqrt{1+e^{1/\ln(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2} \neq 0$$

$$\text{donc} \quad \sqrt{1+e^{1/\ln(n)}} \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2}.$$

► 2 Équivalents et opérations (sommes, produits, quotients, exposants)

1) Équivalent de $\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\ln(n)-e^n+n^4$:

$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad$ et $\quad e^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

donc $\quad \sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{=} o(e^n).$

De plus, par croissances comparées :

$$\ln(n) \underset{n\to\infty}{=} o(e^n) \quad \text{et} \quad n^4 \underset{n\to\infty}{=} o(e^n).$$

Ainsi : $\quad \sin\left(\frac{1}{n}\right)+\ln(n)-e^n+n^4 \underset{n\to\infty}{=} -e^n+o(e^n)$

$$\underset{n\to\infty}{\sim} -e^n.$$

2) Équivalent de $\left(1+\mathrm{sh}(n)\right)(e^n-1)$:

- $1+\mathrm{sh}(n) = 1+\dfrac{e^n+e^{-n}}{2} = \dfrac{e^n}{2}+\underset{n\to\infty}{o}(e^n) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{e^n}{2}.$
- $e^n-1 = e^n+\underset{n\to\infty}{o}(e^n) \underset{n\to\infty}{\sim} e^n.$

En conclusion : $\quad \left(1+\mathrm{sh}(n)\right)(e^n-1) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{e^n}{2}\times e^n = \dfrac{e^{2n}}{2}.$

3) Équivalent de $\sqrt{\ln(n)-1-\frac{2}{n}}$:

$$\ln(n)-1-\tfrac{2}{n} = \ln(n)+\underset{n\to\infty}{o}\left(\ln(n)\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$$

donc $\quad \sqrt{\ln(n)-1-\frac{2}{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\ln(n)}.$

4) Équivalent de $\dfrac{(2+e^{-n})\sin(n)}{(1+n)^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$:

- $2+e^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \neq 0 \quad$ donc $\quad 2+e^{-n} \underset{n\to\infty}{\sim} 2.$
- $1+n \underset{n\to\infty}{\sim} n.$

Donc, comme α est un exposant **constant :**

$$\frac{(2+e^{-n})\sin(n)}{(1+n)^\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2\sin(n)}{n^\alpha}.$$

5) Équivalent de $\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\tan\left(\frac{1}{n}\right)$:

Reformulons l'expression :

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 1,\quad \sin(1/n)-\tan(1/n) &= \sin(1/n)-\frac{\sin(1/n)}{\cos(1/n)} \\ &= \sin(1/n)\left[1-\frac{1}{\cos(1/n)}\right] \\ &= \sin(1/n)\times\frac{\cos(1/n)-1}{\cos(1/n)}.\end{aligned}$$

Puisque $1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, en utilisant les équivalents usuels :

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad \cos(x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2},$$

on obtient :

$$\sin(1/n)-\tan(1/n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}\times\frac{-1/(2n^2)}{1} = -\frac{1}{2n^3}.$$

C'est plus simple avec les développements limités !

$$\sin(x) = x - \tfrac{1}{6}x^3 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)$$
$$\tan(x) = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)$$
$$\text{donc}\quad \sin(x)-\tan(x) = -\tfrac{1}{2}x^3 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right).$$
$$\underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^3}{2}.$$

Puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par changement de variable :

$$\boxed{\sin(1/n) - \tan(1/n) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^3}.}$$

► 3 Une limite incontournable !

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. On cherche la limite de $u_n := \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$. Comme $\alpha/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, à partir d'un certain rang, $1+\frac{\alpha}{n} > 0$ et on peut écrire :

$$u_n = \exp\Big(n\ln\left(1+\tfrac{\alpha}{n}\right)\Big).$$

Toujours parce que $\alpha/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$:

$$n\ln\left(1+\tfrac{\alpha}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} n\times\tfrac{\alpha}{n} = \alpha,$$
$$\text{donc :}\quad n\ln\left(1+\tfrac{\alpha}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha.$$

Puisque $e^x \xrightarrow[x\to\alpha]{} e^\alpha$, par composition de **limites** :

$$u_n = \exp\Big(n\ln\left(1+\tfrac{\alpha}{n}\right)\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^\alpha.$$

Conclusion. $\boxed{\forall\,\alpha\in\mathbb{R} : \quad \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^\alpha.}$

Remarques. Il y a d'autres rédactions possibles, mais deux points sont à garder à l'esprit :

- Ici, l'écriture de la puissance sous forme exponentielle est **incontournable,** car l'exposant n est **variable.**
- **Il ne faut à aucun prix passer à l'exponentielle dans un équivalent !** C'est très tentant ici, et on a tendance à le faire implicitement si on se précipite.

► 4 Équivalents un peu plus subtils

1) Équivalent de $\ln(n^2+1)$:

$$\ln(n^2+1) = \ln\Big(n^2 + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(n^2\right)\Big) = \ln\Big(n^2\times\Big(1+\underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(1)\Big)\Big)$$
$$= \underbrace{2\ln(n)}_{\to+\infty} + \underbrace{\ln\Big(1+\underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(1)\Big)}_{\to0}$$
$$= 2\ln(n) + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\big(\ln(n)\big)$$
$$\underset{n\to\infty}{\sim} 2\ln(n).$$

2) Équivalent de $\ln\left(\dfrac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{sh}(n)}\right)$:

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{sh}(n)} = \frac{e^n+e^{-n}}{2}\times\frac{2}{e^n-e^{-n}}$$
$$= \frac{e^n\times(1+e^{-2n})}{e^n\times(1-e^{-2n})}$$
$$= \frac{1+e^{-2n}}{1-e^{-2n}}$$
$$= 1+\left(\frac{1+e^{-2n}}{1-e^{-2n}}-1\right)$$
$$= 1+\frac{2e^{-2n}}{1-e^{-2n}}$$

$$\text{donc :}\quad \ln\left(\frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{sh}(n)}\right) = \ln\Big(1+\underbrace{\frac{2e^{-2n}}{1-e^{-2n}}}_{\to0}\Big)$$
$$\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2e^{-2n}}{1-e^{-2n}}$$
$$\underset{n\to\infty}{\sim} 2e^{-2n}.$$

3) Équivalent de $\left(1+e^{-n}\right)^{n^2}-1$:

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$\left(1+e^{-n}\right)^{n^2}-1 = \exp\Big(n^2\ln\left(1+e^{-n}\right)\Big)-1.$$

Mais, puisque $e^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$:

$$n^2\ln\left(1+e^{-n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} n^2 e^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CC}} 0.$$

Dans l'équivalent $e^x-1 \underset{x\to0}{\sim} x$, on peut donc effectuer le changement de variable $x \leftarrow n^2\ln(1+e^{-n})$:

$$\exp\Big(n^2\ln\left(1+e^{-n}\right)\Big)-1 \underset{n\to\infty}{\sim} n^2\ln(1+e^{-n})$$
$$\underset{n\to\infty}{\sim} n^2e^{-n}.$$

Conclusion. $\boxed{\left(1+e^{-n}\right)^{n^2}-1 \underset{n\to\infty}{\sim} n^2e^{-n}.}$

► 5 Développements limités (produits et sommes)

1) DL_4 de $f(x) := \sin(x)+2\ln(1+x)$ quand $x\to0$

$$f(x) = \sin(x)+2\ln(1+x)$$
$$= \left(x-\tfrac{1}{6}x^3\right)+2\left(x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4\right)+\mathrm{o}\left(x^4\right)$$
$$= (1+2)x - x^2 + \left(-\tfrac{1}{6}+\tfrac{2}{3}\right)x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$
$$= 3x - x^2 + \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right).$$

2) DL_3 de $f(x) := \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ quand $x\to0$

$$f(x) = \ln(1+x)\times\frac{1}{1+x}$$
$$= \left(x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3\right)\times\left(1-x+x^2-x^3\right)+\mathrm{o}\left(x^3\right)$$
$$= x + \left(-1-\tfrac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\right)x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$
$$= x - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{11}{6}x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right).$$

3) DL_6 de $f(x) := \sin(x)\big(\mathrm{ch}(x) - 1\big)$ quand $x \to 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5\right) \\ &\quad \times \left(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{720}x^6\right) + \mathrm{o}\left(x^6\right) \\ &= \tfrac{1}{2}x^3 + \left(\tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{12}\right)x^5 + \mathrm{o}\left(x^6\right) \\ &= \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{24}x^5 + \mathrm{o}\left(x^6\right). \end{aligned}$$

4) DL_4 de $f(x) := \mathrm{e}^x \sin(x)$ quand $x \to 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4\right) \times \left(x - \tfrac{1}{6}x^3\right) + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\ &= x + x^2 + \left(-\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}\right)x^3 + \left(-\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6}\right)x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\ &= x + x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}\left(x^4\right). \end{aligned}$$

► 6 Développements limités (fonctions composées)

1) DL_2 de $(1+x)^{1/x}$ quand $x \to 0$

Comme l'exposant est variable, on écrit la puissance sous forme d'exponentielle :

$$f(x) = \exp\left(\tfrac{1}{x}\ln(1+x)\right).$$

On calcule d'abord le DL_2 de l'argument de l'exponentielle ; à cause du $\frac{1}{x}$, on pousse le DL du logarithme à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{x}\ln(1+x) &= \tfrac{1}{x}\left(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right), \end{aligned}$$

et alors :

$$f(x) = \exp\left(1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^2\right)\right).$$

L'argument de l'exponentielle tend vers 1 : pour pouvoir composer avec le DL_2 de $\exp(X)$ quand $X \to 0$, on sort le terme 1 de l'exponentielle :

$$f(x) = \exp(1) \times \exp\Big(\underbrace{-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)}_{\phi(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0}\Big)$$

$$\text{et :} \quad \exp(X) = 1 + X + \tfrac{1}{2}X^2 + \underset{X\to 0}{\mathrm{o}}\left(X^2\right).$$

En composant les deux DL :

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}\,.\Big[1 + \left(-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x^2\right) \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x^2\right)^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^2\right)\Big] \\ &= \mathrm{e}\,.\Big[1 + \left(-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x^2\right) + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)\Big] \\ &= \mathrm{e}\,.\Big[1 - \tfrac{1}{2}x + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{8}\right)x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)\Big] \\ &= \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{11\,\mathrm{e}}{24}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right). \end{aligned}$$

2) DL_4 de $f(x) := \sqrt{\cos(x)}$ quand $x \to 0$

On utilise d'abord le DL_4 de $\cos(x)$ quand $x \to 0$:

$$f(x) = \sqrt{1 \underbrace{- \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)}_{\phi(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0}}$$

On mobilise maintenant le DL_2 de $(1+X)^\alpha$ quand $X \to 0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+X} &= (1+X)^{1/2} \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}X + \frac{1/2\cdot(-1/2)}{2}X^2 + \underset{X\to 0}{\mathrm{o}}\left(X^2\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}X - \tfrac{1}{8}X^2 + \underset{X\to 0}{\mathrm{o}}\left(X^2\right). \end{aligned}$$

(l'ordre 2 suffit car $\phi(x)$ est d'ordre 2)

En composant les deux DL, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4\right) \\ &\qquad - \tfrac{1}{8}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4\right)^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right) \\ &= 1 + \left(-\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{48}x^4\right) - \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{4}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\ &= 1 - \tfrac{1}{4}x^2 + \left(\tfrac{1}{48} - \tfrac{1}{32}\right)x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\ &= 1 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{96}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right). \end{aligned}$$

3) DL_2 de $f(x) := \exp\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big)$ quand $x \to 0$

Comme plus haut, on écrit le DL de l'argument de l'exponentielle extérieure :

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\left(1 + (\mathrm{i}x) + \tfrac{1}{2}(\mathrm{i}x)^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\ &= \mathrm{e}\cdot\exp\left(\mathrm{i}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right). \end{aligned}$$

L'argument de l'exponentielle tend vers 0 quand $x \to 0$. On peut composer une deuxième fois par le DL_2 de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}\cdot\Big[1 + \left(\mathrm{i}x - \tfrac{1}{2}x^2\right) + \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{i}x - \tfrac{1}{2}x^2\right)^2 + \mathrm{o}(x^2)\Big] \\ &= \mathrm{e}\cdot\Big[1 + \left(\mathrm{i}x - \tfrac{1}{2}x^2\right) - \tfrac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)\Big] \\ &= \mathrm{e} + \mathrm{e}\,\mathrm{i}x - \mathrm{e}\,x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right). \end{aligned}$$

4) DL_2 de $f(x) := \dfrac{\ln(2-x)}{x^2}$ quand $x \to 1$

On se ramène à un DL en 0 en posant $x = 1 + h$, de sorte que : $\quad x \to 1 \iff h \to 0$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(2-x)}{x^2} = \frac{\ln\big(2-(1+h)\big)}{(1+h)^2} = \frac{\ln(1-h)}{(1+h)^2} \\ &= \ln(1-h) \times (1+h)^{-2} \\ &= \left((-h) - \tfrac{1}{2}(-h)^2\right) \\ &\qquad \times \left(1 - 2h + \tfrac{(-2)\cdot(-3)}{2}h^2\right) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^2\right) \\ &= \left(-h - \tfrac{1}{2}h^2\right) \times \left(1 - 2h + 3h^2\right) + \mathrm{o}\left(h^2\right) \\ &= -h + \left(2 - \tfrac{1}{2}\right)h^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right) \\ &= -h + \tfrac{3}{2}h^2 + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^2\right) \\ &= -(x-1) + \tfrac{3}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{\mathrm{o}}\left((x-1)^2\right). \end{aligned}$$

5) DL_2 de $f(x) := \sin\big(\pi \cos(x)\big)$ quand $x \to \pi/3$

Remarquons d'abord que, quand $x \to \pi/3$, $\pi\cos(x) \to \pi/2$. On écrit donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + \left(\pi\cos(x) - \tfrac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \cos\Big(\underbrace{\pi\left(\cos(x) - \tfrac{1}{2}\right)}_{\phi(x) \xrightarrow[x\to\pi/3]{} 0}\Big). \end{aligned}$$

On sait que : $\quad \cos(X) = 1 - \frac{1}{2}X^2 + \underset{X\to 0}{\mathrm{o}}\big(X^2\big)$.

Pour obtenir un DL_2 de $f(x)$, il suffit d'avoir un DL_1 de $\phi(x)$.

Dans ce but, on applique la formule de Taylor-Young à cos, à l'ordre 1, au voisinage de $\pi/3$:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) + \cos'\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\cdot\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) + \underset{x\to\pi/3}{\mathrm{o}}\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) \\ &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) + \underset{x\to\pi/3}{\mathrm{o}}\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right), \end{aligned}$$

dont on tire le DL_1 souhaité de $\phi(x)$:

$$\phi(x) = \pi\left(\cos(x) - \tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{\sqrt{3}\pi}{2}\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) + \underset{x\to\pi/3}{\mathrm{o}}\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right).$$

On revient enfin à $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \tfrac{1}{2}\big(\phi(x)\big)^2 + \underset{x\to\pi/3}{\mathrm{o}}\big(\phi^2(x)\big) \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3\pi^2}{4}\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right)^2 + \underset{x\to\pi/3}{\mathrm{o}}\left(\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right)^2\right) \\ &= 1 - \tfrac{3\pi^2}{8}\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right)^2 + \underset{x\to\pi/3}{\mathrm{o}}\left(\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right)^2\right). \end{aligned}$$

6) DL_3 de $\tan(x)$ quand $x \to \pi/4$

On pose $x = \pi/4 + h$, de sorte que :

$$x \to \pi/4 \iff h \to 0.$$

On effectue le changement de variable puis on utilise la formule d'addition pour tan :

$$\begin{aligned} \tan(x) = \tan\left(\tfrac{\pi}{4} + h\right) &= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan(h)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan(h)} \\ &= \frac{1 + \tan(h)}{1 - \tan(h)} \\ &= \big(1 + \tan(h)\big) \times \frac{1}{1 - \tan(h)}. \end{aligned}$$

Comme $\tan(h) \to 0$ quand $h \to 0$, le DL du deuxième facteur s'obtient en composant le DL :

$$\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + X^3 + \underset{X\to 0}{\mathrm{o}}\big(X^3\big)$$

avec celui de tangente : $\quad \tan(h) = h + \frac{1}{3}h^3 + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\big(h^3\big)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \tan(h)} &= 1 + \left(h + \tfrac{1}{3}h^3\right) + \left(h + \tfrac{1}{3}h^3\right)^2 \\ &\quad + \left(h + \tfrac{1}{3}h^3\right)^3 + \mathrm{o}\big(h^3\big) \\ &= 1 + \left(h + \tfrac{1}{3}h^3\right) + h^2 + h^3 + \mathrm{o}\big(h^3\big) \\ &= 1 + h + h^2 + \tfrac{4}{3}h^3 + \mathrm{o}\big(h^3\big). \end{aligned}$$

On revient à $\tan(x)$:

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \left(1 + h + \tfrac{1}{3}h^3\right) \times \left(1 + h + h^2 + \tfrac{4}{3}h^3\right) + \mathrm{o}\big(h^3\big) \\ &= 1 + (1+1)h + (1+1)h^2 + \left(\tfrac{4}{3} + 1 + \tfrac{1}{3}\right)h^3 + \mathrm{o}\big(h^3\big) \\ &= 1 + 2h + 2h^2 + \tfrac{8}{3}h^3 + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\big(h^3\big) \\ &= 1 + 2\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right)^2 + \tfrac{8}{3}\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right)^3 \\ &\qquad + \underset{x\to\pi/4}{\mathrm{o}}\left(\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right)^3\right). \end{aligned}$$

7) DL_5 de $f(x) := \cos\big(\pi \sin(x)\big)$ quand $x \to \pi/2$

On pose $x = \pi/2 + h$, de sorte que :

$$x \to \pi/2 \iff h \to 0.$$

On réécrit $f(x)$ à l'aide de la variable h :

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos\big(\pi\sin\left(\tfrac{\pi}{2} + h\right)\big) \\ &= \cos\big(\pi\cos(h)\big) \\ &= \cos\left(\pi\left(1 - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{24}h^4 + \mathrm{o}\big(h^5\big)\right)\right) \\ &= \cos\left(\pi - \left(\tfrac{\pi}{2}h^2 - \tfrac{\pi}{24}h^4 + \mathrm{o}\big(h^5\big)\right)\right) \\ &= -\cos\Big(\underbrace{\tfrac{\pi}{2}h^2 - \tfrac{\pi}{24}h^4 + \mathrm{o}\big(h^5\big)}_{\phi(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0}\Big). \end{aligned}$$

On compose avec : $\quad -\cos(X) = -1 + \frac{1}{2}X^2 + \underset{X\to 0}{\mathrm{o}}\big(X^3\big)$

et on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= -1 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2}h^2 - \tfrac{\pi}{24}h^4\right)^2 + \mathrm{o}\big(h^6\big) \\ &= -1 + \tfrac{\pi^2}{8}h^4 + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\big(h^5\big) \\ &= -1 + \tfrac{\pi^2}{8}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^4 + \underset{x\to\pi/2}{\mathrm{o}}\left(\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^5\right). \end{aligned}$$

► 7 Développements asymptotiques

1) DA de $f(x) := \dfrac{1}{x\,(\mathrm{e}^x - 1)} - \dfrac{1}{x^2}$ quand $x \to 0$, à la précision x^2

Réécrivons $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} - 1\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}} - 1\right).$$

Il s'agit de trouver un DA de la parenthèse à la précision x^4, donc de partir du DL_5 de e^x :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{120}x^5 + \mathrm{o}\big(x^5\big)$$

donc $\quad \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + \mathrm{o}\big(x^4\big).$

Passons à l'inverse :

$$\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + \mathrm{o}(x^4)}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{24}x^3 + \tfrac{1}{120}x^4\right) \\
&\quad + \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{24}x^3 + \tfrac{1}{120}x^4\right)^2 \\
&\quad - \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{24}x^3 + \tfrac{1}{120}x^4\right)^3 \\
&\quad + \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{24}x^3 + \tfrac{1}{120}x^4\right)^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= 1 - \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{24}x^3 + \tfrac{1}{120}x^4\right) \\
&\quad + \left(\tfrac{1}{4}x^2 + \left(\tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{12}\right)x^3 + \left(\tfrac{1}{48} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{48}\right)x^4\right) \\
&\quad - \left(\tfrac{1}{8}x^3 + 3 \cdot \tfrac{1}{24}x^4\right) \\
&\quad + \tfrac{1}{16}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= 1 - \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{24}x^3 + \tfrac{1}{120}x^4\right) \\
&\quad + \left(\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{5}{72}x^4\right) \\
&\quad - \left(\tfrac{1}{8}x^3 + \tfrac{1}{8}x^4\right) \\
&\quad + \tfrac{1}{16}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= 1 - \tfrac{1}{2}x + \left(-\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{4}\right)x^2 + \left(-\tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8}\right)x^3 \\
&\quad + \left(-\tfrac{1}{120} + \tfrac{5}{72} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16}\right)x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{12}x^2 - \tfrac{1}{720}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)
\end{aligned}
$$

Finalement, en retirant 1 et en divisant par x^2 :

$$f(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{12} - \frac{x^2}{720} + \mathrm{o}\left(x^2\right).$$

2) DA de $f(x) := \dfrac{\sin(1/x)}{x+1}$ quand $x \to +\infty$, à la précision $\dfrac{1}{x^4}$

Puisque $x \to +\infty$, on ramène le problème en 0 en posant $h = 1/x$: quand $x \to +\infty$, $h \to 0^+$ et inversement.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sin(1/x)}{x+1} = \frac{\sin(h)}{\frac{1}{h}+1} = \frac{h\sin(h)}{1+h} \\
&= h \times \sin(h) \times \frac{1}{1+h}.
\end{aligned}
$$

On veut un développement asymptotique à la précision $\frac{1}{x^4} = h^4$: on cherche donc un DL_4 en h. Comme il y a un h en facteur, l'ordre 3 suffit pour $\sin(h)$ et $1/(1+h)$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= h \times \left(h - \tfrac{1}{6}h^3 + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^3\right)\right) \\
&\qquad \times \left(1 - h + h^2 - h^3 + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^3\right)\right) \\
&= h \times \left(h - h^2 + \left(1 - \tfrac{1}{6}\right)h^3 + \mathrm{o}\left(h^3\right)\right) \\
&= h^2 - h^3 + \tfrac{5}{6}h^4 + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^4\right) \\
&= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{6x^4} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^4}\right).
\end{aligned}
$$

3) DA de $f(x) := x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x)$ quand $x \to +\infty$, à la précision $\dfrac{1}{x^2}$

On ramène le problème en 0^+ en posant $h = 1/x$,
de sorte que : $\quad x \to +\infty \iff h \to 0^+$.
On effectue le changement de variable et on cherche un DA à la précision h^2 :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x) \\
&= \frac{1}{h}\ln\left(\frac{1}{h}+1\right) - \left(\frac{1}{h}+1\right)\ln\left(\frac{1}{h}\right) \\
&= \frac{1}{h}\ln\left(\frac{1+h}{h}\right) + \left(\frac{1}{h}+1\right)\ln(h) \\
&= \frac{1}{h}\left(\ln(1+h) - \ln(h)\right) + \left(\frac{1}{h}+1\right)\ln(h) \\
&= \frac{\ln(1+h)}{h} + \ln(h) \\
&= \frac{h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + \mathrm{o}\left(h^3\right)}{h} + \ln(h) \\
&= \ln(h) + 1 - \tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{3}h^2 + \underset{h\to 0^+}{\mathrm{o}}\left(h^2\right) \\
&= -\ln(x) + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right).
\end{aligned}
$$

4) DA de $f(x) := \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$ quand $x \to +\infty$, à la précision $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

On pose une nouvelle fois $h = 1/x$.
Le reste sera $\underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h\,\mathrm{e}^{1/h}\right)$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \exp\left(x^2\ln\left(1 + \tfrac{1}{x}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{h^2}\ln(1+h)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{h^2}\left(h - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{3}h^3 + \mathrm{o}\left(h^3\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(\tfrac{1}{h} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}h + \mathrm{o}(h)\right) \\
&= \mathrm{e}^{1/h} \cdot \mathrm{e}^{-1/2} \cdot \exp\left(\tfrac{1}{3}h + \mathrm{o}(h)\right).
\end{aligned}
$$

Puisque $\phi(h) := \frac{1}{3}h + \mathrm{o}(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$,
on peut composer avec le DL à l'ordre 1 de l'exponentielle :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\,\mathrm{e}^{1/h} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{3}h + \mathrm{o}(h)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\,\mathrm{e}^{1/h} + \frac{1}{3\sqrt{\mathrm{e}}}\,h\,\mathrm{e}^{1/h} + \underset{h\to 0^+}{\mathrm{o}}\left(h\,\mathrm{e}^{1/h}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{3\sqrt{\mathrm{e}}}\,\frac{\mathrm{e}^x}{x} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right).
\end{aligned}
$$