Formules de trigonométrie :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$

$\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Formules de trigo hyperbolique :

$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b$

$\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{ch}\, b - \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b$

$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, b\, \mathrm{ch}\, a$

$\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{ch}\, b - \mathrm{sh}\, b\, \mathrm{ch}\, a$

$\mathrm{sh}(p) + \mathrm{sh}(q) = 2\, \mathrm{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right) \mathrm{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\mathrm{ch}(p) + \mathrm{ch}(q) = 2\, \mathrm{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right) \mathrm{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\mathrm{sh}(p) - \mathrm{sh}(q) = 2\, \mathrm{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right) \mathrm{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)$

$\mathrm{ch}(p) - \mathrm{ch}(q) = 2\, \mathrm{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right) \mathrm{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\mathrm{ch}(2a) = \mathrm{ch}^2 a + \mathrm{sh}^2 a$

$\mathrm{sh}(2a) = 2\, \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{ch}\, a$

$\mathrm{ch}^2 a = \frac{1+\mathrm{ch}(2a)}{2}$

$\mathrm{sh}^2 a = \frac{-1+\mathrm{ch}(2a)}{2}$

$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}\, a + \mathrm{th}\, b}{1 + \mathrm{th}\, a\ \mathrm{th}\, b}$

$\mathrm{th}(a-b) = \frac{\mathrm{th}\, a - \mathrm{th}\, b}{1 - \mathrm{th}\, a\ \mathrm{th}\, b}$

Notation complexe :

Soit $\underline{z} = a + jb$.

$|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$arg(\underline{z}) = arctan\left(\frac{b}{a}\right) [2\pi] \quad si\ a > 0$

$arg(\underline{z}) = \pi + arctan\left(\frac{b}{a}\right) [2\pi] \quad si\ a < 0$

$\underline{z}^* = a - jb$

$|\underline{z}|^2 = \underline{z}\, \underline{z}^*$

$arg(\underline{z_1}.\underline{z_2}) = arg(\underline{z_1}) + arg(\underline{z_2})$

$\cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$ $\sin x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$ $\mathrm{ch}\, x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ $\mathrm{sh}\, x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

Développements limités autour de 0 :

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

$\mathrm{sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$ $\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \cdots$$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$ $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots$ $\mathrm{argth}\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$

Equations différentielles :

$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dt}}(t) + \frac{f(t)}{\tau} = g(t) \qquad f(t) = Ke^{-t/\tau} + h(t)$

où h(t) est une solution particulière de l'équation complète.
Si g(t) =Cte, on cherche pour h(t) une constante.
Si g(t) est une fonction de t sinusoïdale pure, on cherche pour h(t) une fonction de t sinusoïdale pure, de même fréquence. Pour être efficace, on passe en notation complexe.

$\frac{\mathrm{d^2f}}{\mathrm{dt^2}}(t) + \alpha f(t) = A$ avec $\alpha > 0$ $\qquad f(t) = a\cos(\sqrt{\alpha}\,t) + b\sin(\sqrt{\alpha}\,t) + \frac{A}{\alpha}$

$\frac{\mathrm{d^2f}}{\mathrm{dt^2}}(t) - \beta f(t) = A$ avec $\beta > 0$ $\qquad f(t) = a'\,\mathrm{ch}(\sqrt{\beta}\,t) + b'\,\mathrm{sh}(\sqrt{\beta}\,t) - \frac{A}{\beta}$

$\frac{\mathrm{d^2f}}{\mathrm{dt^2}}(t) + \gamma\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dt}}(t) + \lambda f(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$ $\qquad$ *f(t)* = SGESSM + SPEC.

Et SPEC s'obtient rapidement si on passe en notation complexe. Si on est en « régime sinusoïdal établi », ou « régime sinusoïdal forcé », on ne s'intéresse qu'à cette SPEC, la SGESSM ayant fini par disparaître si le système est stable.

Formules vectorielles :

$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

$\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} d \\ e \\ f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{vmatrix}$

Primitives :

Fonction	Primitive
x^m	$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\frac{1}{1 - x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left(\left\lvert\frac{x+1}{x-1}\right\rvert\right) + Cte$ si $x \neq 1$ $et -1$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{cotan}\, x + C$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos x\rvert) + C$

Fonction	Primitive
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert tan\frac{x}{2}\right\rvert + C$
$\frac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
$\tan^2 x$	$\tan x - x + C$
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x + C$
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x + C$
$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\mathrm{th}\, x + C$
$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$\frac{-1}{th\, x} + C$
$\mathrm{th}\, x$	$\ln(ch\, x) + C$

A PROPOS DES NOTATIONS COMPLEXES EN ELECTRICITE

<u>Remarque préliminaire</u> : la notation complexe fait intervenir une pulsation $\boxed{\omega}$. Elle n'a donc de sens qu'en régime sinusoïdal pur, c'est-à-dire en régime harmonique.

<u>Notations</u>

- A un courant $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$, on associe la grandeur complexe $\underline{i} = I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$, avec $\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi}$, de telle manière que $i(t) = \Re(\underline{i})$.
- I_m est l'amplitude du courant, $\underline{I}_m$ son <u>amplitude complexe</u>, φ sa <u>phase à l'origine</u>.
- $I_m = |\underline{i}| = |\underline{I}_m|$.
- $\varphi = \arg(\underline{i}) = \arg(\underline{I}_m)$
- On peut aussi introduire la <u>valeur efficace</u>. En <u>régime sinusoïdal pur</u> (= régime harmonique), elle est égale à l'amplitude divisée par $\sqrt{2}$: $I = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$.
- On peut aussi définir une <u>valeur efficace complexe</u> : $\underline{I} = I e^{j\varphi} = \dfrac{\underline{I}_m}{\sqrt{2}} = \dfrac{I_m e^{j\varphi}}{\sqrt{2}}$.
- On peut faire la même chose pour une tension (= différence de potentiel) $u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi)$

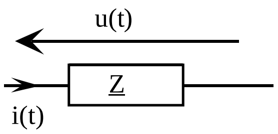
Résumé des notations, en régime sinusoïdal pur de pulsation ω

	Grandeur instantanée	Grandeur complexe	Amplitude	Amplitude complexe	Valeur efficace	Valeur efficace complexe
courant	$i(t) = \Re(\underline{i})$	$\underline{i} = I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$	$I_m = \lvert\underline{i}\rvert = \lvert\underline{I}_m\rvert$	$\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi}$	$I = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$	$\underline{I} = I e^{j\varphi} = \dfrac{\underline{I}_m}{\sqrt{2}} = \dfrac{I_m e^{j\varphi}}{\sqrt{2}}$
tension	$u(t) = \Re(\underline{u})$	$\underline{u} = U_m e^{j\psi} e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t}$	$U_m = \lvert\underline{u}\rvert = \lvert\underline{U}_m\rvert$	$\underline{U}_m = U_m e^{j\psi}$	$U = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$	$\underline{U} = U e^{j\psi} = \dfrac{\underline{U}_m}{\sqrt{2}} = \dfrac{U_m e^{j\psi}}{\sqrt{2}}$

<u>NB</u> : pour un courant $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$, on peut soit se ramener au problème précédent en écrivant $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$, soit poser encore $\underline{i} = I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$, mais cette fois avec $i(t) = \Im(\underline{i})$.

<u>Impédances complexes</u>

En convention récepteur :

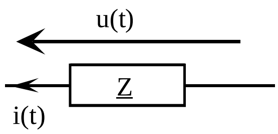


$\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$ $\underline{U}_m = \underline{Z}\,\underline{I}_m$ $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$

$\underline{U} = -\underline{Z}\,\underline{I}$

$U_m = |\underline{Z}| I_m$ $U = |\underline{Z}| I$

En convention générateur :



$\underline{u} = -\underline{Z}\,\underline{i}$ $\underline{U}_m = -\underline{Z}\,\underline{I}_m$

$U_m = |\underline{Z}| I_m$ $U = |\underline{Z}| I$

<u>Puissances $\boxed{\text{reçues}}$ par un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z}$:</u>

A condition de se placer en convention $\boxed{\text{récepteur}}$ (schéma de gauche ci-dessus), on a :

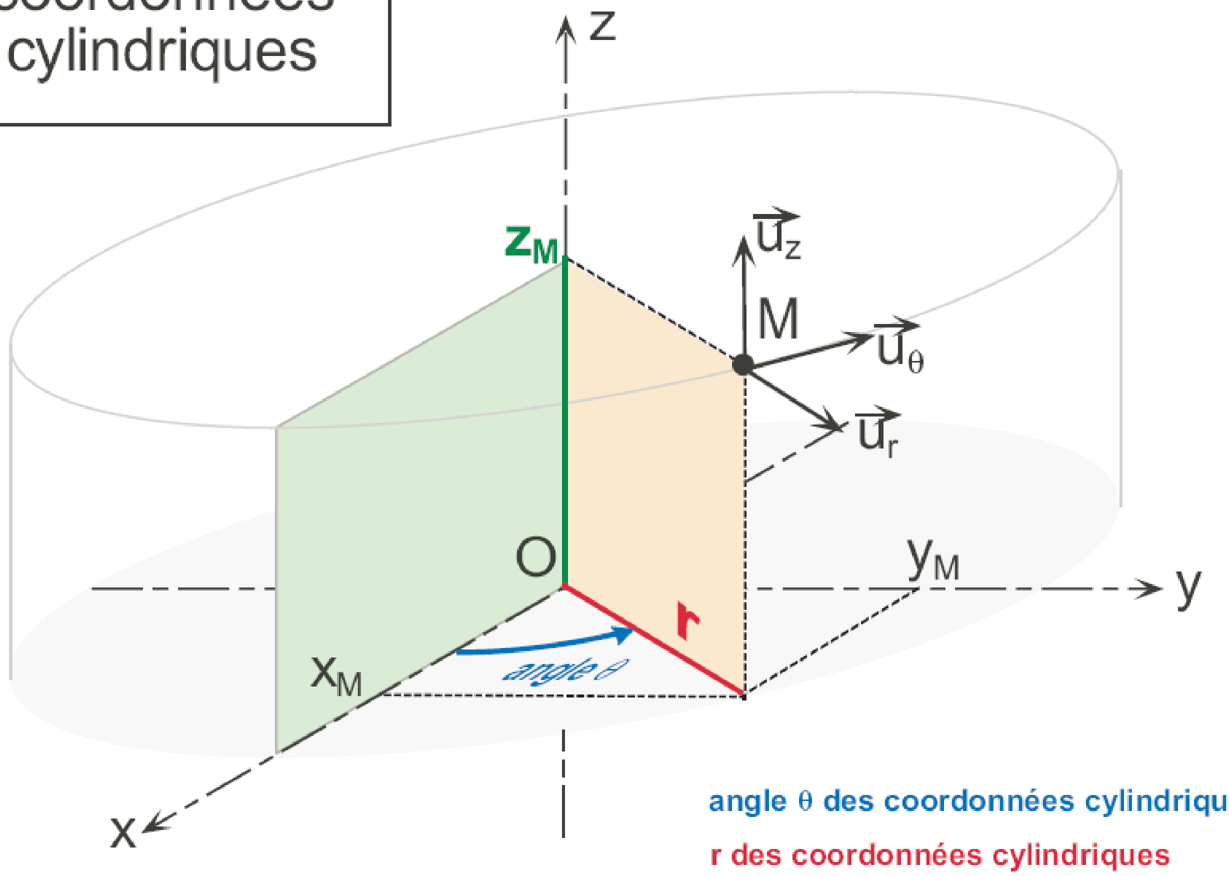
Puissance instantanée : P(t) = u(t) i(t)

Puissance moyenne P_{moy} = <P(t)> $= \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt = \frac{1}{2}\Re(\underline{u}\,\underline{i}^*) = \frac{1}{2}\Re(\underline{U}_m\,\underline{I}_m^*) = \Re(\underline{U}\,\underline{I}^*) = \Re(\underline{Z})I^2 = U^2\Re(\underline{Y})$

La puissance fournie par le dipôle serait l'opposé de la puissance reçue.

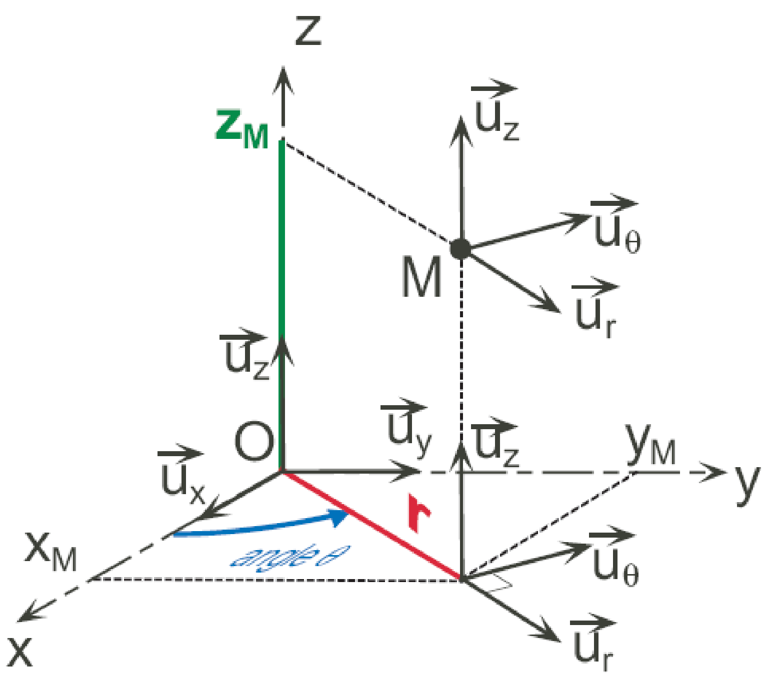
SYSTEMES DE COORDONNEES

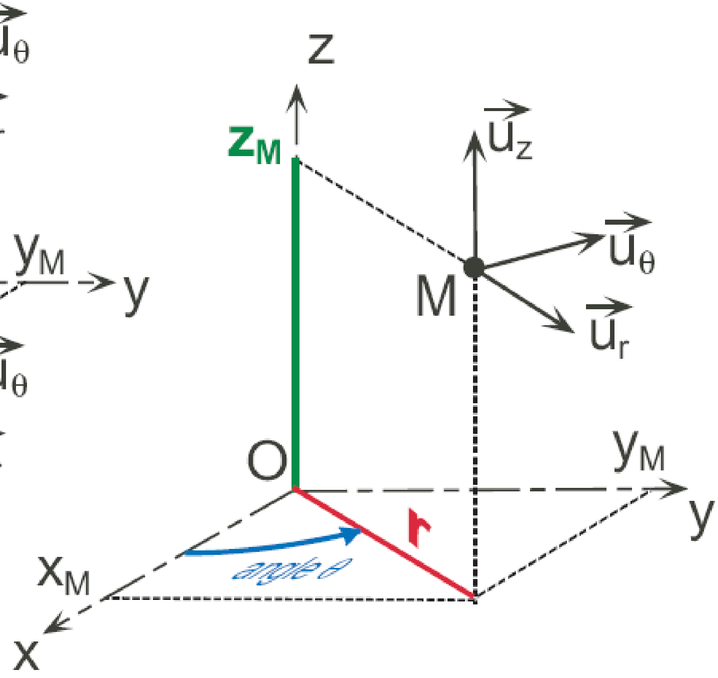
coordonnées cylindriques



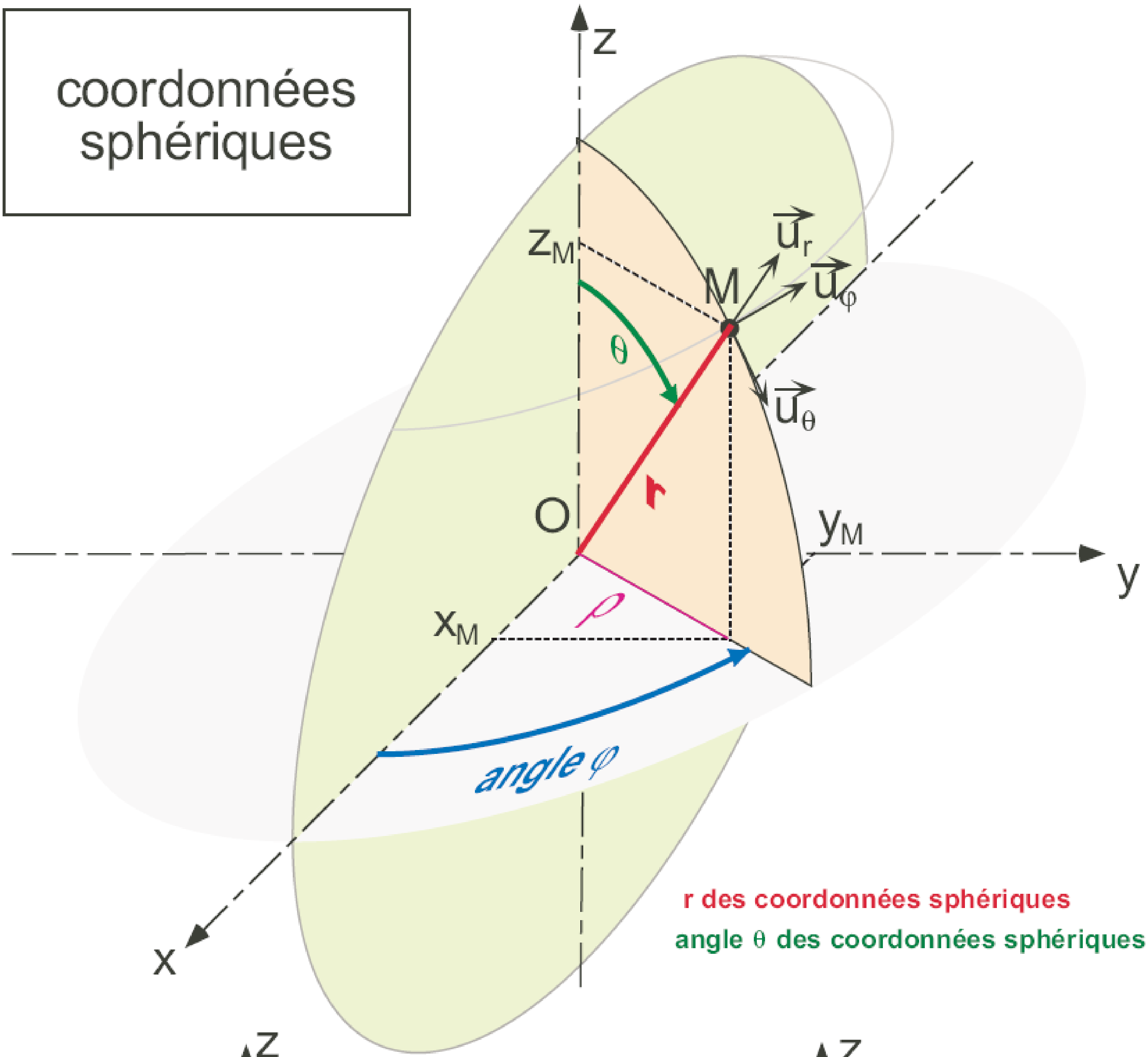
angle θ des coordonnées cylindriques

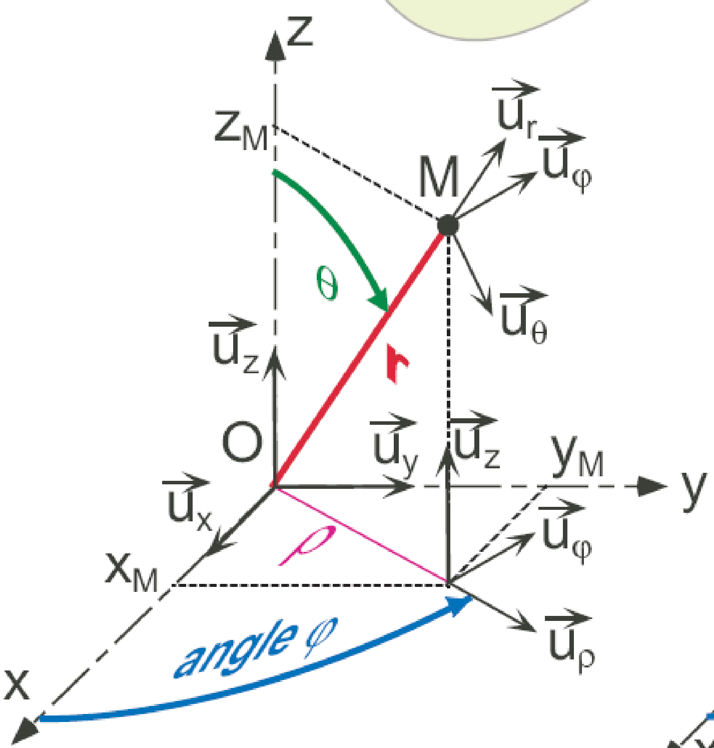
r des coordonnées cylindriques

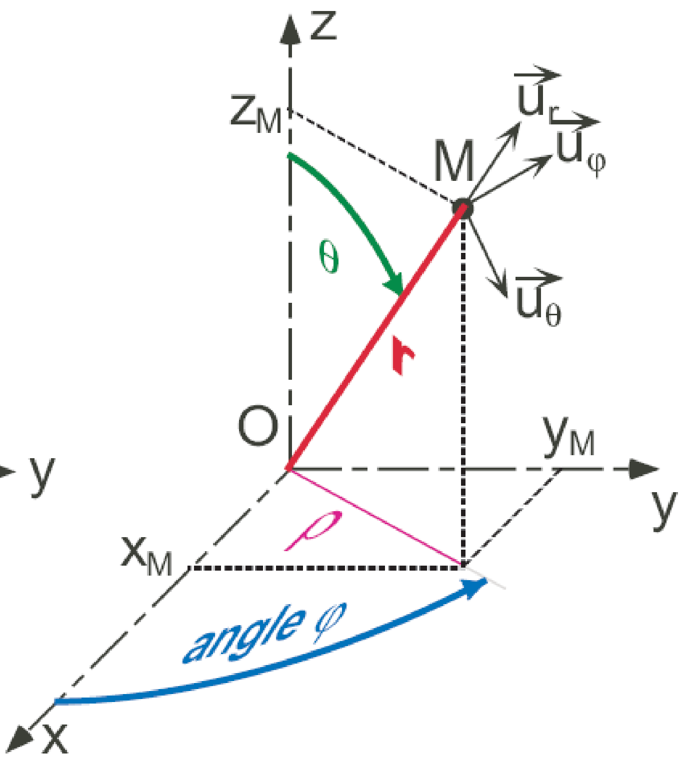


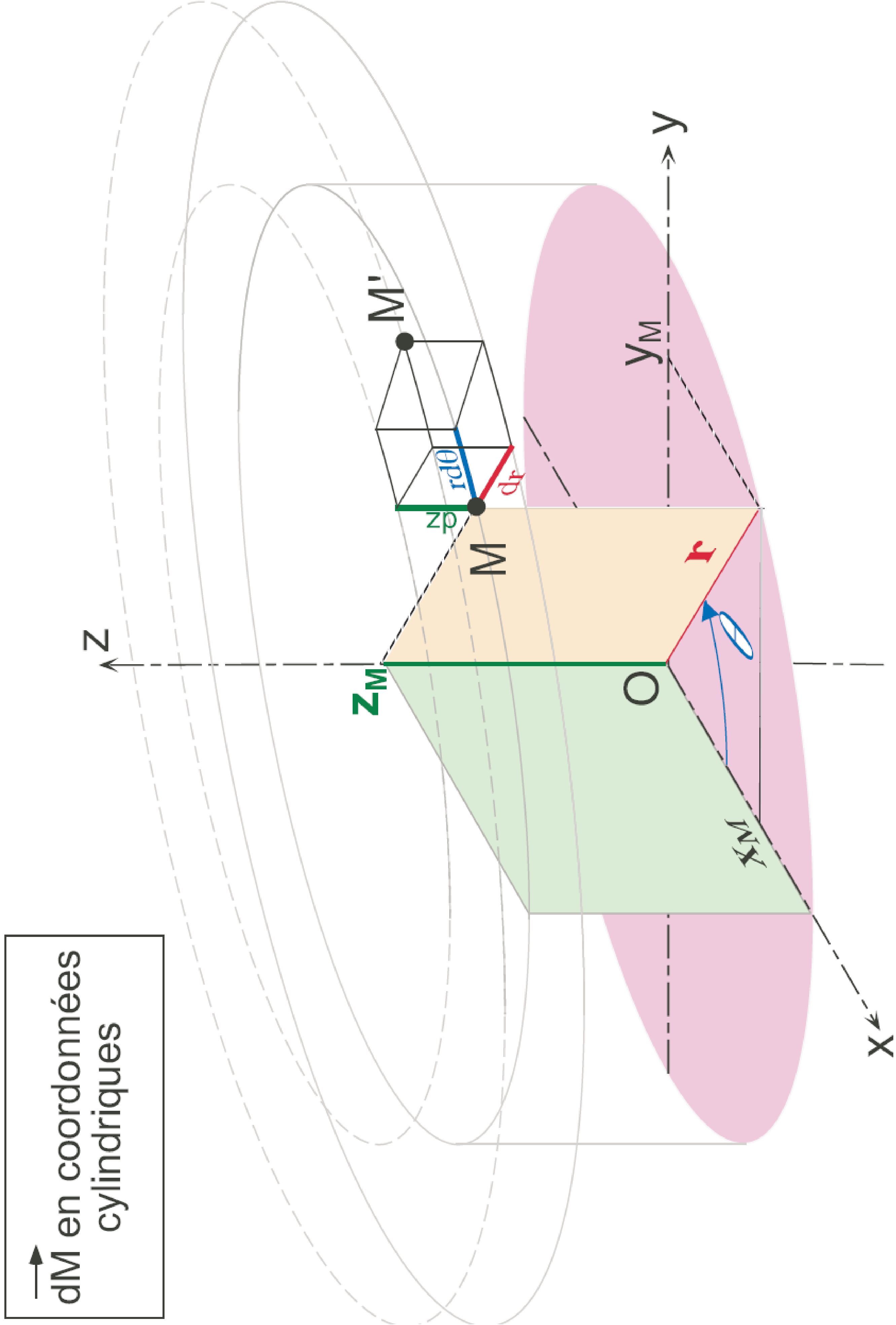


coordonnées sphériques

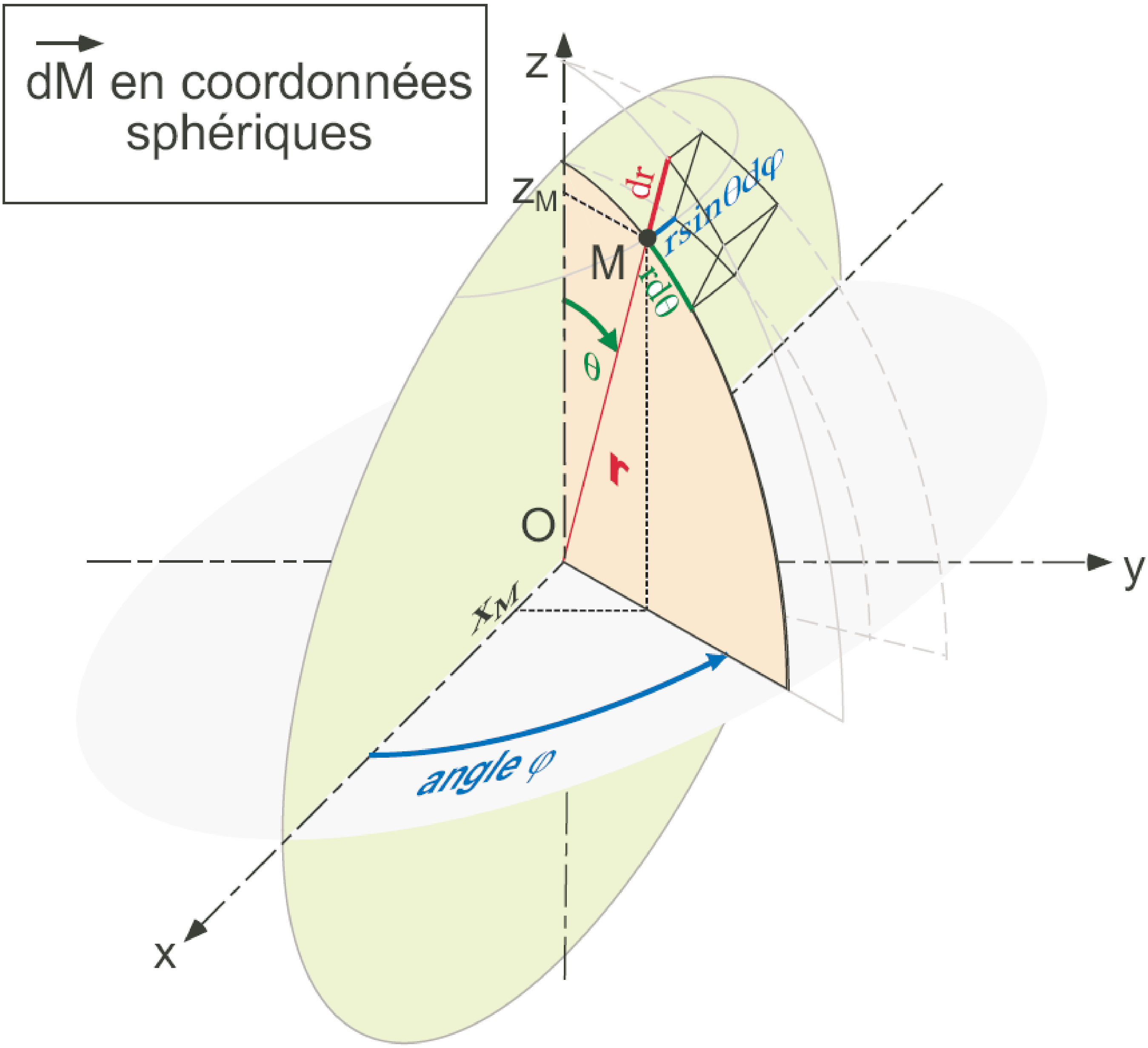








$\overrightarrow{dM}$ en coordonnées cylindriques
M'
M
rdθ
dr
dz
r
θ
O
z
y
x
z_M
y_M
x_M


$\overrightarrow{dM}$ en coordonnées sphériques
z
z_M
dr
$r\sin\theta d\varphi$
M
$rd\theta$
θ
r
O
y
x_M
angle φ
x

Opérateurs de dérivation spatiale :

Vecteur déplacement élémentaire :

En coordonnées cartésiennes : **M(x,y,z).** $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z}$.

$\overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{dM} = \overrightarrow{MM'} = dx\,\overrightarrow{u_x} + dy\,\overrightarrow{u_y} + dz\,\overrightarrow{u_z}$

En coordonnées cylindriques : **M(r,θ,z).** $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}$.

$\overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{dM} = \overrightarrow{MM'} = dr\,\overrightarrow{u_r} + rd\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + dz\,\overrightarrow{u_z}$

En coordonnées sphériques : **M(r,θ,φ).** $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$.

$\overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{dM} = \overrightarrow{MM'} = dr\,\overrightarrow{u_r} + rd\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi}$

Elément de volume :

En coordonnées cartésiennes : $d\tau$(noté parfois$d^3\tau$) $= dx\,dy\,dz$

En coordonnées cylindriques : $d\tau$(noté parfois$d^3\tau$) $= r\,dr\,d\theta\,dz$

En coordonnées sphériques : $d\tau$(noté parfois$d^3\tau$) $= r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

OPERATEUR NABLA : noté $\vec{\nabla}$. C'est un opérateur de dérivation spatiale. Ce n'est pas un vrai vecteur, mais il se comporte de façon semblable.
On peut l'utiliser dans des formules vectorielles.

Si on veut utiliser les coordonnées de $\vec{\nabla}$ dans une base vectorielle, on peut ***mais il est sage de le faire uniquement avec la base associée aux coordonnées cartésiennes.***
On peut alors écrire, En coordonnées cartésiennes : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$.

NOTION DE CHAMP (rappel) :
champ scalaire : $f : M \mapsto f(M)$ donc, en particulier en cartésiennes $f: (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$
champ vectoriel : $\vec{F}: M \mapsto \vec{F}(M)$ donc, en particulier en cartésiennes $\vec{F}: (x,y,z) \mapsto \vec{F}(x,y,z)$

OPERATEUR GRADIENT : Il agit sur un champ scalaire. Le résultat est un champ vectoriel.

Notation et définition :. $\boxed{\overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla}f}$. C'est-à-dire tout se passe comme si on faisait le produit de nabla par le scalaire f. Cette façon d'écrire les choses ne dépend pas du système de coordonnées éventuellement choisi.
Expression en coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$

soit encore $\overrightarrow{grad}f \left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right.$ ***dans*** $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Exemples : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$, $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$, $\vec{\varphi}_{pression} = -\overrightarrow{grad}P$

Signification physique : le vecteur gradient de f est orthogonal aux surfaces iso-f. Il indique la direction à prendre pour que f augmente le plus vite possible spatialement, à partir du point où on le calcule.

Relation importante : $\boxed{df = \overrightarrow{grad}f \cdot \overrightarrow{dM}}$ cette relation est toujours vraie. Elle ne dépend pas du système de coordonnées éventuellement choisi.

<u>OPERATEUR DIVERGENCE :</u> Il agit sur un champ $\boxed{\text{vectoriel}}$. Le résultat est un champ $\boxed{\text{scalaire}}$.

Notation et définition : $\boxed{div\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}}$. C'est-à-dire tout se passe comme si on faisait le produit scalaire de nabla par le vecteur $\vec{F}$. Cette façon d'écrire les choses ne dépend pas du système de coordonnées éventuellement choisi.

Expression en coordonnées cartésiennes :

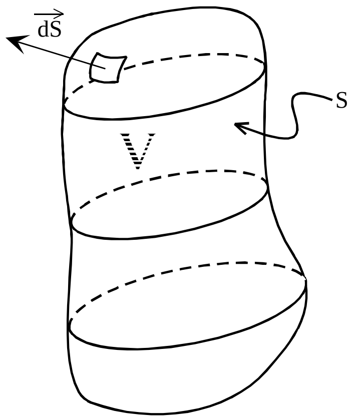
$$div\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad \textit{soit encore } div\vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{vmatrix} \textit{ dans } (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$$

Relation importante : $\boxed{\textit{Théorème d'Ostrogradski}}$

$$\boxed{\oiint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_V div\vec{F} d\tau},$$

où S est une surface <u>fermée</u>, et V le volume délimité par cette surface.
Rappel : pour une surface fermée, le vecteur $\overrightarrow{dS}$ est toujours orienté <u>vers l'extérieur</u> (pour un observateur placé dans V)

Signification physique : un champ dont la divergence est nulle est tel qu'à travers une surface fermée, son flux entrant est égal à son flux sortant. En revanche, si la divergence est non nulle, elle justement proportionnelle à la différence entre les flux sortant et entrant.



<u>OPERATEUR ROTATIONNEL :</u> Il agit sur un champ $\boxed{\text{vectoriel}}$. Le résultat est un champ $\boxed{\text{vectoriel}}$.

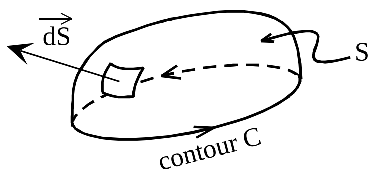
Notation et définition : $\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}}$. C'est-à-dire tout se passe comme si on faisait le produit vectoriel de nabla par le vecteur $\vec{F}$. Cette façon d'écrire les choses ne dépend pas du système de coordonnées éventuellement choisi.

Expression en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{vmatrix} \textit{ dans la base } (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$$

Relation importante : $\boxed{\textit{Théorème de Stokes}}$: $\boxed{\oint_C \vec{F} \cdot \overrightarrow{dM} = \iint_S \overrightarrow{rot}\vec{F} \cdot \overrightarrow{dS}}$,

Où C est un contour fermé <u>orienté</u> et S une surface quelconque s'appuyant sur C, orientée conformément à l'orientation de C



Signification physique : Un champ vectoriel $\vec{F}$ a tendance à tourner autour de son vecteur rotationnel $\overrightarrow{rot}\vec{F}$.

OPERATEUR LAPLACIEN : S'il agit sur un champ scalaire, le résultat est un champ scalaire. S'il agit sur un champ vectoriel, le résultat est un champ vectoriel.

Laplacien scalaire : $\boldsymbol{\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) f}$

En coordonnées cartésiennes : $\boxed{\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$

Laplacien vectoriel : $\boldsymbol{\Delta \vec{F} = \vec{\nabla}^2 \vec{F} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F}}$ ***(noté parfois*** $\boldsymbol{\vec{\Delta} \vec{F}}$***)***

En coordonnées cartésiennes $\boldsymbol{\Delta \vec{F}} \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{\Delta F_x} \\ \boldsymbol{\Delta F_y} \\ \boldsymbol{\Delta F_z} \end{array} \right.$ dans la base $(\vec{\boldsymbol{u}}_x, \vec{\boldsymbol{u}}_y, \vec{\boldsymbol{u}}_z)$

OPERATEUR G scalaire gradient : S'il agit sur un champ scalaire, le résultat est un champ scalaire. S'il agit sur un champ vectoriel, le résultat est un champ vectoriel.

En coordonnées cartésiennes : $\left(\vec{G} \cdot \overrightarrow{grad}\right) f = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right) f = \vec{G} \cdot \left(\overrightarrow{grad} f\right) = G_x \frac{\partial f}{\partial x} + G_y \frac{\partial f}{\partial y} + G_z \frac{\partial f}{\partial z}$

Et $\left(\vec{G} \cdot \overrightarrow{grad}\right) \vec{F} = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{F} = \begin{pmatrix} \left(\vec{G} \cdot \overrightarrow{grad}\right) F_x \\ \left(\vec{G} \cdot \overrightarrow{grad}\right) F_y \\ \left(\vec{G} \cdot \overrightarrow{grad}\right) F_z \end{pmatrix}$

RELATIONS ENTRE LES OPERATEURS :

div de rot : $\boldsymbol{div\left(\overrightarrow{rot}\vec{F}\right) = 0}$

rot de grad : $\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\, f\right) = \vec{0}}$

rot de rot : $\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\, \vec{F}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{F}\right) - \Delta\vec{F}}$

div de grad : $\boldsymbol{div\left(\overrightarrow{grad}\, f\right) = \Delta f}$

Autres relations :

$\overrightarrow{grad}(fg) = f\, \overrightarrow{grad} g + g\, \overrightarrow{grad} f$ $\qquad$ $\mathrm{div}(f\vec{G}) = f\,\mathrm{div}\,\vec{G} + \vec{G} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$

$\overrightarrow{rot}\left(f\, \vec{G}\right) = f\, \overrightarrow{rot}\left(\vec{G}\right) + \overrightarrow{grad}(f) \wedge \vec{G}$ $\qquad$ $\mathrm{div}(\vec{F} \wedge \vec{G}) = \vec{G} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F} - \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{G}$

$\overrightarrow{rot}\left(\vec{F} \wedge \vec{G}\right) = div\left(\vec{G}\right) \vec{F} - \left(\vec{F} \cdot \overrightarrow{grad}\right) \vec{G} - div\left(\vec{F}\right) \vec{G} + \left(\vec{G} \cdot \overrightarrow{grad}\right) \vec{F}$

$\overrightarrow{grad}\left(\vec{F} \cdot \vec{G}\right) = \vec{F} \wedge \overrightarrow{rot}\left(\vec{G}\right) + \left(\vec{F} \cdot \overrightarrow{grad}\right) \vec{G} + \vec{G} \wedge \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right) + \left(\vec{G} \cdot \overrightarrow{grad}\right) \vec{F}$

OPERATEURS EXPRIMES DANS LES DIFFERENTS SYSTEMES DE COORDONNEES :

Opéra-teur	*expression en cartésiennes* base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$	*expression en cylindriques* base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$	*expression en sphériques* base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$
$\overrightarrow{grad}\, f$	$\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ $\frac{\partial f}{\partial z}$	$\frac{\partial f}{\partial r}$ $\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}$ $\frac{\partial f}{\partial z}$	$\frac{\partial f}{\partial r}$ $\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}$ $\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$
$div\, \vec{F}$	$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial (rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (F_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (F_\varphi)}{\partial \varphi}$
$\overrightarrow{rot}\, \vec{F}$	$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$ $\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}$ $\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}$ $\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}$ $\frac{1}{r}\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \theta}$	$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (F_\varphi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (F_\theta)}{\partial \varphi}$ $\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (F_r)}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial (rF_\varphi)}{\partial r}$ $\frac{1}{r}\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial (F_r)}{\partial \theta}$
Δf	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)$ $+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$
$\vec{\Delta}\, \vec{F}$	ΔF_x ΔF_y ΔF_z	rien de simple	rien de simple