# Devoir Maison n° 1.
# Pour le 9 septembre.
# chapitre 1 exercice 11

Soit $p$ un nombre premier, on note :

$$\mathcal{G}_p = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{N}, z^{(p^k)} = 1 \right\}$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note :

$$V_k = \mathbb{U}_{p^k} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z^{(p^k)} = 1 \right\}.$$

**1.** **a)** Montrer que $V_k$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dont on précisera le cardinal.

**b)** Montrer que la suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante pour l'inclusion.

**2.** **a)** Montrer que $\mathcal{G}_p = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k$.

**b)** Montrer que $\mathcal{G}_p$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

**3.** Montrer que si $z \in V_{k+1} \setminus V_k$, alors $z$ est générateur de $V_{k+1}$.

**4.** Soit $H$ un sous-groupe de $\mathcal{G}_p$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N}, H \neq V_k$.

**a)** Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, H \not\subset V_k$.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

**b)** Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, V_k \subset H$.

**c)** En déduire que les sous-groupes propres de $\mathcal{G}_p$ sont cyclique et qu'aucun d'entre eux n'est maximal pour l'inclusion.

**5.** Montrer que $\mathcal{G}_p$ n'est pas engendré par une partie finie.