

Chapitre(s) 0 : Packs de démarrage

Feuille d'exercices - correction partielle

Exercice 4 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Réduire les expressions suivantes (on suppose que les dénominateurs ne s'annulent pas) :

$$A = \frac{1}{x-7} + \frac{3}{2x-1}$$

$$B = \frac{3}{(x-1)(x+2)} + 5$$

$$C = \frac{3(x+2)}{x^2} \times \frac{x(x+1)}{2(x+3)} \div \frac{2x+2}{x}$$

$$A = \frac{5x-22}{(x-7)(2x-1)}$$

$$B = \frac{5x^2+5x-7}{(x-1)(x+2)}$$

$$C = \frac{3(x+2)}{4(x+3)}$$

petite subtilité dans C : on exploite le fait que $2x+2 = 2(x+1)$ ce qui donne une simplification rapide...

Exercice 5 :

Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$. Réduire les expressions suivantes :

$$1. A = x^{-1} \times \frac{x^7}{x^4}$$

$$2. B = \frac{x^2}{(x-2)^3}$$

$$3. C = \frac{x^{-2}y^3}{(xy-1)^3}$$

$$1. A = x^2$$

$$2. B = x^8$$

$$3. C = \frac{y^6}{x^5}$$

Exercice 6 :

Réduire les expressions suivantes :

$$1. A = 9^{n+2} - 9^{n+1} + 2 \times 3^{2n}$$

$$2. B = \frac{2}{4^n} - 7 \times 2^{-2n-1} + 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$3. C = 3^{2n}(-1)^n - (-9)^n$$

L'astuce est d'utiliser le fait que $a^{n+p} = a^n a^p$ et $a^{np} = (a^n)^p$, afin de factoriser le plus possible les expressions.

1.

$$A = 9^n 9^2 - 9^n \times 9 + 2 \times 9^n$$

$$= 9^n(81 - 9 + 2)$$

$$A = 74 \times 9^n$$

2.

$$B = \frac{2}{4^n} - 7 \frac{1}{2^{2n+1}} + 5 \frac{1}{2^{2n}}$$

$$= 2 \frac{1}{4^n} - 7 \frac{1}{4^n} \frac{1}{2} + 5 \frac{1}{4^n}$$

$$= \frac{1}{4^n} \left(2 - \frac{7}{2} + 5\right)$$

$$B = \frac{7}{2} \times \frac{1}{4^n} = \frac{7}{2 \times 4^n}$$

3.

$$C = (3^2)^n (-1)^n - (-1 \times 9)^n$$

$$= 9^n (-1)^n - (-1)^n 9^n$$

$$C = 0$$

Exercice 7 :

Résoudre les systèmes linéaires suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$1. \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x - 3y = 1 \\ 7x - y = 2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x - 3y = 3x \\ x - y = y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x + 4y - 4z = -8 \\ 3x + 9y - 6z = 9 \\ 4x + 17y - 11z = 41 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x - y = 0 \\ -3x + 4y + 2z = 5 \\ -2x + 3y + z = 3 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 4x - y - z = 3 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = 8 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} -x + 6y - z = 7 \\ 2x - 5y + 3z = 2 \end{cases}$$

5.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y = 0 \\ -3x + 4y + 2z = 5 \\ -2x + 3y + z = 3 \end{cases} &\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_2 + 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1} \begin{cases} x - y = 0 \\ y + 2z = 5 \\ y + z = 3 \end{cases} \\ &\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_2 - L_3]{L_3 \leftarrow L_2 - L_3} \begin{cases} x - y = 0 \\ y + 2z = 5 \\ z = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases} &\xrightarrow[L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3]{L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2} \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3y - 3z = -3 \\ y - 3z = -1 \end{cases} \\ &\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_2 - 3L_3]{L_3 \leftarrow L_2 - 3L_3} \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3y - 3z = -3 \\ 6z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 4x - y - z = 3 \end{cases} &\xrightarrow[L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3]{L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2} \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3y + 3z = -3 \\ 3y + 3z = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3y + 3z = -3 \\ 0 = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Système incompatible.

8.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = 8 \end{cases} &\xrightarrow[L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3]{L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3} \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ y + 2z = 1 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\xrightarrow[L_3 \leftarrow 3L_2 - L_3]{L_3 \leftarrow 3L_2 - L_3} \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ y + 2z = 1 \\ +3z = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

9. Ce système aura nécessairement une inconnue secondaire, puisqu'il n'y a que deux équations pour 3 inconnues.

$$\begin{aligned} \begin{cases} -x + 6y - z = 7 \\ 2x - 5y + 3z = 2 \end{cases} &\xrightarrow[L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2]{L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2} \begin{cases} -x + 6y - z = 7 \\ 7y + z = 16 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -23 + 13y \\ z = 16 - 7y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$