Chapitres 0 : Packs de démarrage
Feuille d'exercices bonus

Exercice 1 :

Soit $m \in \mathbb{R}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et en fonction de m les équations suivantes, d'inconnue x :

1. $mx = m$.
2. $m(x+2) = (m+2)(2x-1)$.
3. $x^2 + 2mx + 1 = 0$.

La difficulté est qu'il faut prendre en compte le paramètre, sans le considérer comme une inconnue. Il ne s'agit pas de "trouver m", mais de repérer les différentes situations possibles, en fonction des valeurs de m.

Pour cela, le principe est de considérer m comme un nombre, et d'être attentif aux opérations effectuées.

1. On a ici envie de diviser par m, ce qui n'est possible que si $m \neq 0$.
   on a donc deux cas, et donc deux ensembles solutions possibles :

   Si $m \neq 0$ **:**
   $$mx = m \Leftrightarrow x = 1$$
   ainsi $\boxed{S = \{1\}}$

   Si $m = 0$ **:** L'équation devient $0x = 0$. Ainsi x est comme on veut
   ainsi $\boxed{S = \mathbb{R}.}$
2. Ici, i faut bien considérer m comme une constante, et voir ensuite ce qu'il est possible de faire :
   $m(x+2) = (m+2)(2x-1) \Leftrightarrow mx + 2m = 2mx + 4x - m - 2 \Leftrightarrow mx + 4x = 3m + 2 \Leftrightarrow (m+4)x = 3m+2$
   A cette étape, on a envie de diviser par $m+4$, ce qui n'est possible que si $m \neq -4$.

   Si $m \neq -4$ $\quad (m+4)x = 3m+2 \Leftrightarrow x = \dfrac{3m+2}{m+4}$
   Ainsi, $\boxed{S = \left\{\dfrac{3m+2}{m+4}\right\}}$
   (une seule solution, qui est fonction de m donc)

   Si $m = -4$ $\quad (m+4)x = 3m+2 \Leftrightarrow 0 = -10$
   Ainsi $\boxed{S = \emptyset}$
3. $x^2 + 2mx + 1 = 0$: c'est une équation algébrique du second ordre. On calcule le discriminant et on trouve $\Delta = 4m^2 - 4 = 4(m^2 - 1)$
   Il y a cette fois ci 3 cas, selon le signe de Δ, qui est donc du signe de $m^2 - 1$.
   On peut voir directement que $m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$ ou alors chercher les racines (qui sont 1 et -1), ce qui donne donc :

   Si $m \in]-1, 1[$ $\quad$ Alors $\Delta < 0$ et donc l'équation n'a pas de solution.
   $\boxed{S = \emptyset.}$

   Si $m = 1$ **ou** $m = -1$ $\quad$ Alors $\Delta = 0$, on a une unique solution : $x = \dfrac{-2m}{2} = -m$.
   Ainsi $\boxed{S = \{-m\}}$ (une seule solution, qui dépend de m : $S = \{-1\}$ dans le cas $m = 1$, $S = \{1\}$ ans le cas $m = -1$)

   Si $m \leq -1$ **ou** $m \geq 1$ $\quad$ Alors $\Delta \geq 0$. On obtient deux solutions : $x = \dfrac{-2m + \sqrt{4m^2 - 4}}{2} = -m + \sqrt{m^2 - 1}$ ou $x = -m - \sqrt{m^2 - 1}$
   Ainsi $\boxed{S = \{-m + \sqrt{m^2 - 1}; -m - \sqrt{m^2 - 1}\}}$: Deux solutions (qui dépendent de m).

Exercice 2 :

Résoudre les systèmes linéaires suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

1. $\left\{\begin{array}{rcl} u+w &=& 1 \\ v+w &=& 0 \\ u+v &=& 3 \\ u+3v &=& 5 \\ u-4v &=& -2 \end{array}\right.$

2. en fonction du réel λ, résoudre $\left\{\begin{array}{ll} -x-2y &= \lambda x \\ 3x+4y &= \lambda y \end{array}\right.$

---

1. Avec les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, $L_4 = L_4 - L_1$, $L_5 \leftarrow L_1 - L_5$ pour enlever les u, puis $L_3 \leftarrow L2 - L_3$, $L_4 \leftarrow 3L_1 - L_4$, $L_5 \leftarrow 4L_2 - L_5$, on arrive au trois dernières lignes qui sont quasi identique. la fin du pivot de Gauss donnerait des $0 = 0$, et donc un système compatible.

$$\left\{\begin{array}{rcl} u+w &=& 1 \\ v+w &=& 0 \\ u+v &=& 3 \\ u+3v &=& 5 \\ u-4v &=& -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u+\quad w &=& 1 \\ v+w &=& 0 \\ v-w &=& 2 \\ 3v-w &=& 4 \\ 4v+w &=& 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u+\quad w &=& 1 \\ v+w &=& 0 \\ 2w &=& -2 \\ 4w &=& -4 \\ 3w &=& -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u &=& 2 \\ v &=& 1 \\ w &=& -1 \end{array}\right.$$

Ainsi $S = \{(2;1;-1)\}$.

2. On commence par ranger le système :

$$\left\{\begin{array}{ll} -x-2y &= \lambda x \\ 3x+4y &= \lambda y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} (-1-\lambda)x-2y &= 0 \\ 3x+(4-\lambda)y &= 0 \end{array}\right.$$

Pour enlever le $3x$ de la seconde ligne, l'opération à faire serait $L_2 \leftarrow (-1-\lambda)L_2 - 3L_1$
Or une telle opération est interdite si $-1-\lambda = 0$, c'est à dire si $\lambda = -1$.
Cela nous donne donc un premier cas à traiter :

si $\lambda \neq -1$ $\quad L_2 \leftarrow (-1-\lambda)L_2 - 3L_1$ donne

$$\left\{\begin{array}{rl} (-1-\lambda)x-2y &= 0 \\ 3x+(4-\lambda)y &= 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} (-1-\lambda)x-2y &= 0 \\ ((4-\lambda)(-1-\lambda)+6)y &= 0 \end{array}\right.$$

Or $(4-\lambda)(-1-\lambda)+6 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$.
Pour avoir y, on veut diviser par cette quantité, or $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$ (solutions évidentes).
Cela donne donc encore des cas :

Si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 2$ (toujours avec $\lambda \neq 1$)

$$\left\{\begin{array}{rl} (-1-\lambda)x-2y &= 0 \\ ((4-\lambda)(-1-\lambda)+6)y &= 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x &= 0 \\ y &= 0 \end{array}\right.$$

Ainsi $S = \{(0;0)\}$ (un seul couple solution)

Si $\lambda = 1$

$$\left\{\begin{array}{rl} (-1-\lambda)x-2y &= 0 \\ ((4-\lambda)(-1-\lambda)+6)y &= 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} -2x-2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x &= -y \\ y &\in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Ainsi $S = \{(-y;y), y \in \mathbb{R}\} = \{y(-1;1), y \in \mathbb{R}\}$
Une infinité de solutions (en fait, une droite, qui passe par l'origine et de vecteur directeur $(-1;1)$.)

Si $\lambda = 2$

$$\left\{\begin{array}{rl} (-1-\lambda)x-2y &= 0 \\ ((4-\lambda)(-1-\lambda)+6)y &= 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} -3x-2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x &= -\frac{2}{3}y \\ y &\in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Ainsi $S = \{(-\frac{2}{3}y;y), y \in \mathbb{R}\} = \{y(-\frac{2}{3};1), y \in \mathbb{R}\}$
Une infinité de solutions (en fait, une droite, qui passe par l'origine et de vecteur directeur $(-\frac{2}{3};1)$, ou $(-2;3)$)

Si $\lambda = -1$ Il faut repartir du tout premier système après le rangement puisque dès la première opération, on avait supposé $\lambda \neq -1$:

$$\left\{\begin{array}{rl} (-1-\lambda)x-2y &= 0 \\ 3x+(4-\lambda)y &= 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} -2y &= 0 \\ 3x+5y &= 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x &= 0 \\ y &= 0 \end{array}\right.$$