Durée de l'épreuve : 2h.

Exercice 1

En précisant soigneusement les ensembles de définition et de résolution, résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle :

1. $x^2 + 6x - 7 = 0$, puis $e^{2x} + 6e^x - 7 = 0$
2. $\sqrt{3x+7} = x + 1$.
3. $\ln(2x) = \ln(x^2 - 1)$.

---

1. On remarque déjà que l'équation est une équation polynômiale, définie sur $\mathbb{R}$, et qu'on va résoudre sur $\mathbb{R}$ également.
   En observant que 1 est solution évidente, on en déduit que -7 est également solution d'où

   $$\boxed{x^2 + 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -7}$$

   Pour la seconde équation, posons $X = e^x$.
   L'équation $e^{2x} + 6e^x - 7 = 0$ devient alors $X^2 + 6X - 7 = 0$ mais cette fois $X > 0$.
   Ainsi $X = 1$ est l'unique solution, c'est à dire

   $$\boxed{e^{2x} + 6e^x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 0}$$

2. On commence par régler le problème de définition : $\sqrt{3x+7}$ est défini si et seulement si $3x + 7 \geq 0$, c'est à dire $x \geq -\dfrac{7}{3}$.
   En outre, si x est solution, alors comme $\sqrt{3x+7} \geq 0$, on a également $x + 1 \geq 0$, donc $x \geq -1$.
   L'ensemble de résolution de cette équation est donc $[-1, +\infty[$.
   Sur cet intervalle, $\sqrt{3x+7}$ et $x + 1$ sont positifs, ainsi :

   $$\begin{aligned}\sqrt{3x+7} = x + 1 &\Leftrightarrow 3x + 7 = (x+1)^2 \\ &\Leftrightarrow 0 = x^2 + 2x + 1 - 3x - 7 \\ &\Leftrightarrow 0 = x^2 - x - 6\end{aligned}$$

   Or $x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 3$ (-2 est racine évidente, ou on calcule le discriminant qui vaut 25)
   Comme -2 n'est pas dans l'ensemble de résolution, on en déduit que

   $$\boxed{\sqrt{3x+7} = x + 1 \Leftrightarrow x = 3}$$

3. L'équation est définie si et seulement si $2x > 0$ et $x^2 - 1 > 0$
   Or $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, ce qui, combiné avec la première condition, donne donc comme ensemble de définition de l'équation $I =]-1, +\infty[$.
   Aucune condition ne semble s'ajouter pour la résolution, et on résout donc l'équation sur cet intervalle I. On a alors

   $$\begin{aligned}\ln(2x) = \ln(x^2 - 1) &\Leftrightarrow 2x = x^2 - 1 (\text{ par injectivité de } \exp) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0\end{aligned}$$

   On étudie maintenant $x^2 - 2x - 1$, dont le discriminant est 8 et qui admet donc deux racines racines réelles : $x_1 = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$, et $x_2 = 1 - \sqrt{2}$
   Comme on ne résout que sur $]1, +\infty[$, on écarte x_2 et on obtient

   $$\boxed{\ln(2x) = \ln(x^2 - 1) \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}}$$

Exercice 2

Résoudre les systèmes ci dessous :

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{rl} x-3y+2z & =1 \\ 2x-5y+3z & =5 \\ 3x-7y+5z & =8 \end{array} \right.$$

$$S_2 : \left\{ \begin{array}{rl} 2x+5y-6z & =3 \\ x+2y-2z & =1 \\ -3x-8y+10z & =-5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} x-3y+2z & =1 \\ 2x-5y+3z & =5 \\ 3x-7y+5z & =8 \end{array} \right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rl} x-3y+2z & =1 \\ y-z & =3 \\ 2y-z & =5 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rl} x-3y+2z & =1 \\ y-z & =3 \\ z & =-1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} x & =9 \\ y & =2 \\ z & =-1 \end{array} \right.$$

L'unique solution de S_1 est donc $x=9, y=2, z=-1$

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2x+5y-6z & =3 \\ x+2y-2z & =1 \\ -3x-8y+10z & =-5 \end{array} \right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rl} 2x+5y-6z & =3 \\ y-2z & =1 \\ -y+2z & =-1 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rl} 2x+5y-6z & =3 \\ y-2z & =1 \\ 0 & =0 \end{array} \right. \quad \text{(système de rang 2, compatible)}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} x & =-1-2z \\ y & =1+2z \\ z & \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions est donc

$$S = \{(-1-2z, 1+2z, z), z \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 3

Soit $P : x \mapsto x^3 + x^2 + 2x + 2$

1. Trouver un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$.
2. En remplaçant α par la valeur de la question précédente, déterminez $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$P(x) = (x-\alpha)(ax^2+bx+c)$$

3. En déduire l'ensemble de définition de la fonction

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3+x^2+2x+2}{x-2}}$$

---

1. On a $P(-1) = 0$, d'où $\boxed{\alpha = -1}$
2. On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$P(x) = (x+1)(ax^2+bx+c)$$

Plusieurs techniques : on peut développer et identifier, ou repérer directement que $a = 1$ et $c = 2$, avant d'en déduire que $b = 0$
ainsi

$$\boxed{P(x) = (x+1)(x^2+2)}$$

3. Comme $x^2 + 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x)$ est du signe de $(x+1)$.
D'autre part, le quotient est défini pour $x \neq 2$.
Enfin, comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est défini sur $\mathbb{R}_+$ seulement, on va utiliser un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
(x^2+2)		$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
quotient		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Finalement, f est définie sur $\boxed{]-\infty,-1]\cup]2,+\infty[}$.

Exercice 4 (Des récurrences)

1. Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = 0 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} & = u_n + (2n+1) \end{cases}$$

   (a) Vérifiez que $u_1 = 1$, puis calculez u_2, u_3 et u_4.
   (b) Conjecturer une formule donnant u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et démontrez cette formule par récurrence.

2. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = u_1 & = 1 \\ \forall n \geq 0, u_{n+2} & = u_{n+1} + 3u_n \end{cases}$$

   Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 3^n$.

---

1. (a) On a bien $u_1 = 0 + (2 \times 0 + 1) = 1$.
   Ensuite $u_2 = u_1 + (2 \times 1 + 1) = 4$, $u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 1 = 9$ et $u_4 = 16$.

   (b) Il semblerait que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = n^2$.
   Montrons cela par récurrence.

   Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $u_0 = 0 = 0^2$.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n = n^2$.
   On a alors $u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \underset{HR}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$
   L'hérédité est vérifiée.

   Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.

2. Montrons par récurrence double que $u_n \leq 3^n$.

   Init : On a bien $u_0 = 1 \leq 3^0$, et $u_1 = 1 \leq 3^1$.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leq 3^n$ et $u_{n+1} \leq 3^{n+1}$
   Alors $3u_n \leq 3^{n+1}$ et par somme d'inégalités

$$u_{n+1} + 3u_n \leq 3^{n+1} + 3^{n+1} = 2 \times 3^{n+1}$$

   Ainsi $u_{n+2} \leq 2.3^{n+1}$ et comme $2 < 3$, on en déduit

$$u_{n+2} \leq 3.3^{n+1} = 3^{n+2}$$

   ce qui achève l'hérédité.

Exercice 5

Soit $m \in \mathbb{R}$ et soit le système d'inconnues $x, y \in R$ suivant :

$$\begin{cases} mx + y &= 1 \\ x + my &= 1 \end{cases}$$

Déterminez le nombre de solutions de ce système en fonction des valeurs de m.

On n'a pas encore vraiment traité ce genre d'équation. L'idée est de faire très attention à chaque opération, car il ne faut en faire aucune d'interdite.

Par exemple ici, la première opération qu'on voudrait faire, c'est $L_2 \leftarrow mL2 - L1$, mais un problème se pose si $m = 0$, puisqu'on ne peut pas multiplier la ligne sur laquelle on travaille par 0 !

On peut donc déjà faire un premier cas :

Si $m = 0$: Le système donne alors directement $y = 1$ et $x = 1$: un unique couple de solutions.

Si $m \neq 0$: On peut alors effectuer l'opération $L_2 \leftarrow mL_2 - L_1$ et on obtient :

$$\begin{cases} mx + y &= 1 \\ x + my &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx + y &= 1 \\ (m^2 - 1)y &= m - 1 \end{cases}$$

Il y a alors trois cas :

si $m^2 - 1 \neq 0$ (et $m \neq 0$) Le système est de rang 2, avec deux inconnues. Il y a un $\boxed{\text{unique couple solution}}$ (il suffit de diviser par $m^2 - 1$ la deuxième ligne, et par m la première pour avoir x et y... ce n'est pas demandé : on veut juste le nombre de solution !)

si $m = 1$ Le système devient

$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

Rang 1, deux inconnues et compatible : il y a une inconnue paramètre, et donc $\boxed{\text{une infinité de solutions.}}$

si $m = -1$

$$\begin{cases} -x + y &= 1 \\ 0 &= -2 \end{cases}$$

Cette fois, c'est incompatible, et le système n'a $\boxed{\text{pas de solution.}}$

Exercice 6 (A faire en dernier et seulement si tout le reste est fait.)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n - 1}$

1. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4.
2. Conjecturer une formule pour u_{2n} et pour u_{2n+1} et démontrez la.

---

1. On a $u_1 = \dfrac{u_0}{u_0 - 1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$

   Puis $u_2 = \dfrac{u_1}{u_1 - 1} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$

   On a alors $u_3 = -1$ et $u_4 = \dfrac{1}{2}$.

2. Il semblerait que $u_{2n} = \dfrac{1}{2}$ et que $u_{2n+1} = -1$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons donc $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $u_{2n} = \dfrac{1}{2}$ et $u_{2n+1} = -1$.

   C'est une récurrence simple, même si ça ressemble à une récurrence double (en fait, c'est une récurrence où la proposition $P(n)$ contient deux propositions)

   Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_{2\times 0} = u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{2\times 0+1} = u_1 = -1$. La proposition $\mathcal{P}(0)$ est donc vérifiée.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   Alors $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = \dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n+1} - 1}$. Or $u_{2n+1} = -1$ car on a supposé $\mathcal{P}(n)$.
   Donc $u_{2(n+1)} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$.
   De plus, $u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = \dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+2} - 1}$. On vient de montrer que $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = \dfrac{1}{2}$
   On a donc $u_{2(n+1)+1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$
   On a bien prouvé $\mathcal{P}(n+1)$
   Conclusion : par le principe de récurrence, on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $u_{2n} = \dfrac{1}{2}$ et $u_{2n+1} = -1$.