La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 2h.

Conseils :

1. Lire tout le sujet avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices. Ils ne sont pas classé par ordre de difficulté, mais par thème.
2. Le but d'un DS est de faire le plus de choses justes, et pas le plus de choses "tout court" : ne chercher pas à tout faire (le sujet est probablement trop long), mais soyez rigoureux et attentifs dans ce qui est fait.
3. La rigueur de la rédaction et des justifications est essentielle, et fait partie du barème. L'absence de justification supprime tous les points de la question, même si la réponse finale est juste.
   En particulier, n'oubliez pas de préciser les liens entre vos calculs ("donc", "si et seulement si", etc....)
4. Une présentation agréable est attendue : laisser une marge à gauche pour que je puisse commenter, aérer votre texte et **encadrez vos résultats.**

Exercice 1

En précisant soigneusement les ensembles de définition et de résolution, résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle :

1. $x^2 + 6x - 7 = 0$, puis $e^{2x} + 6e^x - 7 = 0$
2. $\sqrt{3x+7} = x + 1$.
3. $\ln(2x) = \ln(x^2 - 1)$.

Exercice 2

Résoudre les systèmes ci dessous :

$$S_1 : \begin{cases} x - 3y + 2z &= 1 \\ 2x - 5y + 3z &= 5 \\ 3x - 7y + 5z &= 8 \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} 2x + 5y - 6z &= 3 \\ x + 2y - 2z &= 1 \\ -3x - 8y + 10z &= -5 \end{cases}$$

Exercice 3

Soit $P : x \mapsto x^3 + x^2 + 2x + 2$

1. Trouver un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$.
2. En remplaçant α par la valeur de la question précédente, déterminez $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$P(x) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$$
3. En déduire l'ensemble de définition de la fonction
$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3 + x^2 + 2x + 2}{x - 2}}$$

Exercice 4 (Des récurrences)

1. Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} &= u_n + (2n+1) \end{cases}$$

   (a) Vérifiez que $u_1 = 1$, puis calculez u_2, u_3 et u_4.

   (b) Conjecturer une formule donnant u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et démontrez cette formule par récurrence.

2. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = u_1 &= 1 \\ \forall n \geq 0, u_{n+2} &= u_{n+1} + 3u_n \end{cases}$$

   Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 3^n$.

Exercice 5

Soit $m \in \mathbb{R}$ et soit le système d'inconnues $x, y \in R$ suivant :

$$\begin{cases} mx + y &= 1 \\ x + my &= 1 \end{cases}$$

Déterminez le nombre de solutions de ce système en fonction des valeurs de m.

Exercice 6 (A faire en dernier et seulement si tout le reste est fait.)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$

1. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4.
2. Conjecturer une formule pour u_{2n} et pour u_{2n+1} et démontrez la.