Révision d'analyse, équations, récurrence
DM 1

Exercice 1 Soit $P : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

1. Trouver un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$.
2. En remplaçant α par la valeur de la question précédente, déterminez $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$P(x) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$$
3. En déduire l'ensemble de définition de la fonction
$$f : x \mapsto \ln(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$$

Exercice 2 Résoudre selon la valeur de $a \in \mathbb{R}$ le système suivant :

$$\begin{cases} x + 3y + z & = 1 \\ x - y + 2z & = 2 \\ x + 7y & = a \end{cases}$$

Exercice 3 Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{2}{n+2} u_n \end{cases}$$

1. Vérifiez que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(n+2)^2 - \frac{2n^2}{n+2} - (n+1)^2 \geq 0$$
2. Montrez par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n^2$