Programme de colle S2

Conseils pratiques

- À votre arrivée, séparez le tableau en parties égales.
  Si vous collez avec quelqu'un d'autre que votre professeur, écrivez votre nom.
- **Organisez votre partie du tableau en colonnes.**
  N'écrivez ni trop gros, ni trop petit.
- Utilisez une partie du tableau comme brouillon.
- Rompez les morceaux de craie neufs pour ne pas les faire crisser.
- **Rédigez, mais succinctement :** les abréviations sont autorisées, n'écrivez pas les justifications immédiates (il y a l'oral pour ça), ne faites pas de longues phrases.
- N'hésitez pas à **faire des schémas** pour illustrer votre démarche.
- **La colle est un exercice oral :** il faut s'exercer à s'exprimer clairement devant un examinateur.

Structure de la colle

La colle que vous passerez sera le plus souvent composée des étapes suivantes :

1. Quelques définitions, propriétés ou théorème du cours à restituer.
   *On attend toujours une restitution **rapide** et **précise.***
2. Une démonstration ou un exercice du programme de colle à refaire.
   Dans l'idéal, en temps raisonnable (vous serez coupés si cela dure trop) et sans aide.
3. Un exercice dans l'esprit de la feuille de TD, partie *Entraînement* ;
4. Un exercice dans l'esprit de la feuille de TD, partie *Approfondissement*.
   Si le temps le permet.

Notions au programme

- **Révisions de première année :** calcul asymptotique, avec en particulier : équivalents usuels, développements limités usuels, échelle de comparaison des suites ; calcul d'équivalents et de o.
- **Chapitre 1, Séries numériques :** en totalité.

Démonstrations à connaître

- **[§I.2] Condition nécessaire de convergence d'une série numérique**
- **[§I.3] Étude des séries géométriques $\sum_{n\geqslant n_0} q^n$ ($q\in\mathbb{C}$)**
- **[§III.1] Nature d'une série à termes positifs**
- **[§III.2] Théorème de comparaison par inégalités**
- **[§IV.4] Règle de d'Alembert.**
- **[§IV.5] Critère spécial des séries alternées :**
  convergence, signe et majoration de la valeur absolue de la somme dans le cas $\sum_{n\geqslant 0} u_n = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n r_n$ où $\forall n\geqslant 0,\ \ r_n\geqslant 0$.

Exercices à savoir refaire

- **[Exercice 2]** Preuve élémentaire que la série harmonique est divergente
- **[Exercice 6, Q3]** Nature et somme de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n-1}{5^n\, n!}$.
- **[Exercice 10]** Équivalent des sommes partielles de la série harmonique.
- **[Exercice 15]** Nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ par le critère de d'Alembert.
- **[Exercice 17 et 18, Q1]** Calcul du carré de Cauchy de la série $\sum_{n\geqslant 0} 2^{-n}$ par elle-même ; calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,.\,2^{-n}$.

Compétences attendues

Calcul asymptotique

- Connaître les équivalents usuels et les développements limités usuels **[→ TD1b/2 et 11]**
- Prouver qu'une suite est équivalente à une constante non nulle **[→ TD1b/3]**
- Effectuer un changement de variable dans un équivalent ou un développement asymptotique **[→ TD1b/4]**
- Distinguer les suites infiniment petites des suites infiniment grandes et des suites convergeant vers une constante non nulle **[→ TD1b/6]**
- Placer des suites sur une échelle de comparaison graphique **[→ TD1b/7]**
- Calculer un équivalent en décomposant le problème en blocs indépendants qui se multiplient, se divisent et sont élevés à une puissance fixe **[→ TD1b/5]**
- Calculer l'équivalent d'une somme en évaluant le poids relatif des termes **[→ TD1b/8]**

- Montrer qu'une expression u_n est négligeable devant $\frac{1}{n^\alpha}$ / que $\frac{1}{n}$ est négligeable devant u_n en utilisant la « règle du n^α » **[→ §IV.2]**

Séries numériques

- Maîtriser la nature des objets relatifs à l'étude des séries **[→ §I, §II.1]** :

Série	$\sum_{n\geqslant n_0} u_n$
Terme général	$(u_n)_{n\geqslant n_0}$
Terme de rang n	u_n
Somme partielle de rang n	$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} u_k$
Somme de la série	$S := \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n$
Reste de rang n	$R_n := S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$

- Prouver qu'une série est grossièrement divergente **[→ §I.2, exo 3]**
- Prouver la convergence d'une série en étudiant la limite de ses sommes partielles **[→ exo 1, §II.2, exo 6 Q3]**
- Connaître les séries usuelles : harmonique, géométriques exponentielles, de Riemann **[→ §I.3, §III.4]**
- Envisager un reste de série convergente comme différence entre somme et somme partielle **[→ §II.1/déf.]** ou comme somme d'une série **[→ §II.1/propr.]** ; savoir qu'un reste de série convergente tend toujours vers 0.
- Reconnaître une série télescopique ; en déduire la nature et la somme éventuelle de la série **[→ §II.2, exo 5]**
- Étudier la limite d'une suite en étudiant la nature de la série télescopique associée **[→ §II.2 (principe), §VI.1 (application)]**
- Utiliser la linéarité de la sommation **soigneusement** pour étudier la nature d'une série et sa somme éventuelle **[→ §II.3, exo 6 et 7]**
- Mobiliser les théorèmes de comparaison pour étudier la nature d'une série ; **toujours essayer en premier la comparaison par équivalents [→ §IV.3 (bilan), exos 8, 9, 12, 13]**
- Conjecturer une relation de domination pertinente pour prouver la nature d'une série en s'aidant d'une échelle de comparaison graphique **[→ exo 14]**
- Étudier la nature d'une série à termes positifs en étudiant le caractère majoré ou non de ses sommes partielles **[→ §III.1 (principe), exo 11 Q1 (application)]**
- Prouver qu'une série à termes quelconques est convergente en montrant son absolue convergence **[→ §IV.1]**
- Mobiliser la règle de d'Alembert sur les séries appropriées (à termes strictement positifs, à structure multiplicative) pour étudier la nature d'une série **[→ §IV.4, exo 15]**
- Mobiliser la méthode des rectangles (comparaison série/intégrale) afin de déterminer : la nature d'une série, un équivalent de ses sommes partielles en cas de divergence, un équivalent de ses restes en cas de convergence **[→ §III.3, exos 10 et 11]**
- Justifier qu'une série est alternée **[→ §IV.5, ex. sous la déf.]**
- Appliquer le critère spécial des séries alternées (CSSA) en listant correctement les hypothèses **[→ §IV.5]** ; mobiliser toutes ses conclusions et pas seulement la convergence de la série **[→ exo 16]**.
- Calculer le produit de Cauchy de deux séries **[→ exo 17]**
- Calculer la somme d'un produit de Cauchy de deux séries **absolument convergentes [→ exo 18]**
- Connaître la formule de Stirling **[→ §VI.1]**