COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Cours

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Compléments sur les matrices

A. Trace d'une matrice carrée

Dans ce paragraphe, n désigne un entier naturel non nul.

Définition 1

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle *trace de* A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme des cœfficients diagonaux de la matrice A, c'est-à-dire :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Exemple 1 : Calculer la trace de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et donner $\mathrm{tr}(I_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 2

- L'application $\mathrm{tr} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array}$ est une forme linéaire.
- Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{tr}(A^\top) = \mathrm{tr}(A)$.
- Pour tout $(A, B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$, on a $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Attention, en général, $\mathrm{tr}(AB) \neq \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$.

Exemple 2 : Déterminer deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{tr}(AB) \neq \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$.

Exemple 3 : Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Exemple 4 : Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ et montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.

B. Matrices par blocs

Soit $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Soit $(p_1,p_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $p_1+p_2 = p$ et $(q_1,q_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $q_1+q_2 = q$.

On définit quatre sous-matrices de A : $A_{1,1} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p_1\\1\leqslant j\leqslant q_1}} \in \mathscr{M}_{p_1,q_1}(\mathbb{K})$, $A_{1,2} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p_1\\q_1+1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathscr{M}_{p_1,q_2}(\mathbb{K})$, $A_{2,1} = (a_{i,j})_{\substack{p_1+1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q_1}} \in \mathscr{M}_{p_2,q_1}(\mathbb{K})$ et $A_{2,2} = (a_{i,j})_{\substack{p_1+1\leqslant i\leqslant p\\q_1+1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathscr{M}_{p_2,q_2}(\mathbb{K})$.

On peut alors écrire $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2}\end{array}\right)$ et on dit que la matrice A est définie *par blocs*.

Exemple 5 : On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $C = I_3$, $D = 0_{3,2}$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D\end{array}\right)$.
Donner explicitement M.

Proposition 3 (*Transposition*)

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ définie par blocs : $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2}\end{array}\right)$.
On a :

$$A^\top = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1}^\top & A_{2,1}^\top \\ \hline A_{1,2}^\top & A_{2,2}^\top\end{array}\right).$$

Exemple 5 (suite) : Pour la matrice M définie ci-dessus, calculer $M^\top$.

Proposition 4 (*Combinaison linéaire*)

Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, définies par blocs selon le même découpage $(p = p_1+p_2, q = q_1+q_2)$:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2}\end{array}\right) \text{ et } B = \left(\begin{array}{c|c} B_{1,1} & B_{1,2} \\ \hline B_{2,1} & B_{2,2}\end{array}\right).$$

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda A + B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda A_{1,1}+B_{1,1} & \lambda A_{1,2}+B_{1,2} \\ \hline \lambda A_{2,1}+B_{2,1} & \lambda A_{2,2}+B_{2,2}\end{array}\right)$.

Proposition 5 (*Produit*)

Soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.
On suppose que A et B sont définies par blocs et que le découpage en colonnes de A est le même que le découpage en lignes de B $(q = q_1+q_2)$.
Alors $AB = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B_{1,1} & B_{1,2} \\ \hline B_{2,1} & B_{2,2}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1}B_{1,1}+A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2}+A_{1,2}B_{2,2} \\ \hline A_{2,1}B_{1,1}+A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2}+A_{2,2}B_{2,2}\end{array}\right)$.

Exemple 6 : On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On peut généraliser ceci à un nombre quelconque de blocs : $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,m} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,m} \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,m} \end{array}\right)$.

On retiendra que :

- lors de la transposition, les blocs des lignes et colonnes sont échangés et transposés,
- pour la combinaison linéaire, le découpage par blocs des matrices en jeu doit être le même (blocs de même taille),
- pour le produit AB, le découpage selon les colonnes de A doit être le même que le découpage selon les lignes de B.

Lorsque $n = m$, on appelle :

- matrice *triangulaire (supérieure) par blocs* toute matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ \hline (0) & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline (0) & \cdots & (0) & A_{n,n} \end{array}\right)$
- matrice *diagonale par blocs* toute matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & (0) & \cdots & (0) \\ \hline (0) & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ \hline (0) & \cdots & (0) & A_{n,n} \end{array}\right)$.

C. Compléments sur les déterminants

Proposition 6 (*Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs*)

Si $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \hline 0 & \cdots & 0 & A_p \end{array}\right)$ est une matrice triangulaire par blocs telle que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, A_k est une matrice carrée, alors $\det(A) = \prod_{k=1}^{p} \det(A_k)$.

Attention, en général, $\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \neq \det(A)\det(D) - \det(C)\det(B)$.

Définition/Proposition 7 (*Déterminant de Vandermonde*)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

- On appelle *déterminant de Vandermonde du n-uplet* $(x_1, \dots, x_n)$ le nombre :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

- On a $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

Notons que si $(x_1,\dots,x_n)$ est un n-uplet de nombres distincts deux à deux alors $V(x_1,\dots,x_n) \neq 0$.

Exemple 7 : *Problème d'interpolation de Lagrange*

On considère $n+1$ points de $\mathbb{R}^2$ notés $A_0,\dots,A_n$.
Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note (a_k,b_k) les coordonnées du point A_k dans la base canonique et on suppose que les réels $a_0,\dots,a_n$ sont deux à deux distincts.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à n dont la courbe représentative passe par les points $A_0,\dots,A_n$.
2. Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$$

En écrivant la matrice de l'application linéaire φ dans les bases canoniques, retrouver le résultat de la question précédente.

II. Compléments sur les polynômes

Ici, n désigne un entier naturel et $a_0,\dots,a_n$ sont $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ **deux à deux distincts**.

Définition 8

On appelle *polynômes interpolateurs de Lagrange associés à* $a_0,\dots,a_n$ les polynômes $L_0,\dots,L_n$ définis par :

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ L_i(X) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{X-a_k}{a_i-a_k}.$$

Notons que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, L_i est un polynôme de degré n et de cœfficient dominant $\dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(a_i-a_k)}$.

Proposition 9

- On a pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j} \overset{def.}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$
- La famille $(L_0,\dots,L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et on a pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$:

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i.$$

- En particulier, on a $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$.

Exemple 7 (suite) : *Problème d'interpolation de Lagrange*

Donner une expression, à l'aide des polynômes interpolateurs de Lagrange, de l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n dont la courbe représentative passe par les points $A_0,\dots,A_n$.

III. Compléments sur les espaces vectoriels

A. Produit d'espaces vectoriels

1. Produit de deux espaces vectoriels

On rappelle que le produit cartésien de deux ensembles A et B est l'ensemble de tous les couples dont la première composante appartient à A et la seconde à B.

$$A \times B = \{(u,v) \mid u \in A \text{ et } v \in B\}.$$

Lorsque $A = B$, on note cet ensemble A^2.

Définition/Proposition 10

Soit $(E,+,.)$ et $(F,\hat{+},\hat{.})$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Si on pose :

- $\forall (u,v) \in E \times F,\ \forall (u',v') \in E \times F,\ (u,v)\check{+}(u',v') = (u+u', v\hat{+}v')$
- $\forall (u,v) \in E \times F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda\check{.}(u,v) = (\lambda.u, \lambda\hat{.}v)$

alors $(E \times F, \check{+}, \check{.})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel appelé *espace vectoriel produit de E et F.*

Proposition 11

Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie alors $E \times F$ est de dimension finie et on a :

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F).$$

2. Généralisation à un nombre fini d'espaces vectoriels

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que le produit cartésien de p ensembles $A_1, \ldots, A_p$ est l'ensemble de tous les p-uplets où pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, la $i$ème composante appartient à A_i.

$$\prod_{i=1}^{p} A_i = \{(u_1, ..., u_p) \mid \forall i \in [\![1,p]\!],\ u_i \in A_i\}.$$

Lorsque $A_1 = A_2 = \ldots = A_p$, on note cet ensemble A^p.
Pour simplifier, on utilise ci-dessous une unique notation pour l'addition et pour la multiplication externe, sans distinction selon les espaces vectoriels considérés.

Définition/Proposition 12

Soit $E_1, \ldots, E_p$ p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Si on pose :

- $\forall (u_1, ..., u_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_i, \forall (u'_1, ..., u'_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_i : (u_1, ..., u_p) + (u'_1, ..., u'_p) = (u_1 + u'_1, ..., u_p + u'_p)$
- $\forall (u_1, ..., u_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_i,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda.(u_1, ..., u_p) = (\lambda.u_1, ..., \lambda.u_p)$

alors $\left(\prod_{i=1}^{p} E_i, +, .\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel appelé *espace vectoriel produit des $E_1, \ldots, E_p$.*

Proposition 13

Si $E_1, \dots, E_p$ sont des espaces vectoriels de dimension finie alors $\prod_{i=1}^{p} E_i$ est de dimension finie et on a :

$$\dim\left(\prod_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i).$$

Exemple : $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$.

B. Somme de sous-espaces vectoriels

On généralise dans ce paragraphe la notion de somme de deux sous-espaces vectoriels (étudiée en PCSI) à un nombre fini de sous-espaces vectoriels.

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_p$ p sous-espaces vectoriels de E (où $p \in \mathbb{N}^*$).

a) Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Définition 14

On appelle *somme des* $F_1, \dots, F_p$ et on note $\sum_{i=1}^{p} F_i$ l'ensemble des vecteurs w de E pouvant s'écrire $w = \sum_{i=1}^{p} u_i$ avec pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $u_i \in F_i$.
Ainsi :

$$\sum_{i=1}^{p} F_i = \{w \in E \mid \exists (u_1, ..., u_p) \in \prod_{i=1}^{p} F_i \text{ tel que } w = \sum_{i=1}^{p} u_i\}.$$

Notons qu'on a $(F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + F_2 + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3)$.
La somme est associative : la somme d'un nombre fini de sous-espaces est inchangée par l'ajout ou le retrait de paires de parenthèses.

Proposition 15

La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\bigcup_{i=1}^{p} F_i$.

Si G est un sous-espace vectoriel de E alors on a l'équivalence :

$$\left[\sum_{i=1}^{p} F_i \subset G\right] \Leftrightarrow \left[\forall i \in [\![1, p]\!],\ F_i \subset G\right]$$

Théorème 16

Hyp. On suppose que $F_1, \ldots, F_p$ sont de dimension finie.

- Alors $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est de dimension finie et on a :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i).$$

- *Cas particulier $p = 2$: Formule de Grassmann*

On a :

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2).$$

b) Notion de somme directe

Définition 17

La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est dite *directe* lorsque pour tout $w \in \sum_{i=1}^{p} F_i$, il existe un unique p-uplet $(u_1, \ldots, u_p) \in \prod_{i=1}^{p} F_i$ tel que $w = \sum_{i=1}^{p} u_i$.

Dans ce cas, la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est aussi notée $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

La somme directe est également associative.

Proposition 18 (*Caractérisation de la somme directe dans le cas particulier $p = 2$*)

La somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Attention, pour $p \geqslant 3$, on ne dispose plus d'une caractérisation de la somme directe par une intersection réduite au vecteur nul et il ne suffit pas que les F_i soient deux à deux en somme directe pour que la somme de tous les F_i soit directe.

Exemple 8 : Dans $E = \mathbb{R}^2$, on considère $F = \operatorname{Vect}\big((1,0)\big)$, $G = \operatorname{Vect}\big((0,1)\big)$ et $H = \operatorname{Vect}\big((1,1)\big)$. Montrer que les sous-espaces vectoriels F, G et H sont deux à deux en somme directe mais que la somme $F + G + H$ n'est pas directe.

Proposition 19 (*Caractérisation de la somme directe dans le cas général*)

La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si :

$$\forall (u_1, \ldots, u_p) \in \prod_{i=1}^{p} F_i, \quad \left(\sum_{i=1}^{p} u_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ u_i = 0_E\right).$$

Proposition 20

Hyp. On suppose que $F_1, \dots, F_p$ sont de dimension finie.
La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

c) Décomposition de E en somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition 21

On dit que $F_1, \dots, F_p$ sont *supplémentaires dans* E lorsque $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i \quad \text{signifie} \quad E = \sum_{i=1}^{p} F_i \text{ et la somme } \sum_{i=1}^{p} F_i \text{ est directe}$$

ou encore tout élément w de E peut s'écrire de manière unique sous la forme $w = \sum_{i=1}^{p} u_i$ avec pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $u_i \in F_i$.

▸ Attention de ne pas confondre les termes *complémentaire* et *supplémentaire*.
Si F est un sous-ensemble de E alors le complémentaire de F dans E est par définition :

$$E \setminus F = \{u \in E,\ u \notin F\}.$$

Il vérifie comme propriété $F \cup (E \setminus F) = E$.
On peut noter que si F est un sous-espace vectoriel de E alors $E \setminus F$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E car il ne contient pas 0_E.

Exemple 9 : Soit $E = \mathbb{R}^2$. On considère la droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$.
Représenter graphiquement D, le complémentaire de D et un supplémentaire de D.
Déterminer tous les supplémentaires de D.

▸ Pour montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, on pourra procéder par analyse-synthèse (*cf. exemple 10*) ou utiliser les *Propositions 22* et *23* lorsque l'espace vectoriel E est de dimension finie.

Exemple 10 : Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note F le sous-ensemble de E formé des fonctions paires et G celui formé des fonctions impaires.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Proposition 22

Hyp. On suppose que E est de dimension finie.
Si deux des trois assertions suivantes sont vérifiées :

$$(i)\ E = \sum_{i=1}^{p} F_i \qquad (ii) \text{ la somme } \sum_{i=1}^{p} F_i \text{ est directe} \qquad (iii)\ \dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$

alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

Proposition 23

Hyp. On suppose que E est de dimension finie.
$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ si et seulement si la concaténation d'une base de chaque F_i donne une base de E.

Conséquence : On obtient une décomposition de E en somme directe de sous-espaces vectoriels en réalisant une partition d'une base de E et en considérant les sous-espaces vectoriels engendrés par les vecteurs correspondants à chaque partie.
Par exemple, si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, en notant $F_1 = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$ alors on a $E = F_1 \oplus F_2$.

Définition 24

Hyp. On suppose que E est de dimension finie.

- On appelle *base de E adaptée à la décomposition* $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ toute base de E telle que les premiers vecteurs forment une base de F_1, les suivants une base de F_2,..., et les derniers une base de F_p.
- On appelle *base de E adaptée au sous-espace vectoriel F* toute base de E telle que les premiers vecteurs forment une base de F.

Pour obtenir une base de E adaptée à un sous-espace vectoriel $F \neq \{0_E\}$, il suffit de considérer une base de F, qui est alors une famille libre de E, que l'on complète en une base de E par le théorème de la base incomplète.

Proposition 25

Hyp. On suppose que E est de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.

Exemple 11 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 6.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.
Pour tout $a \in E$, on note $F(a) = \mathrm{Vect}(a, f(a))$.

1. Soit a un vecteur non nul de E. Montrer que la famille $\big(a, f(a)\big)$ est libre.

2. Soit $(a_1, a_2) \in E^2$ avec $a_1 \neq 0_E$ et $a_2 \notin F(a_1)$.
   Montrer que $F(a_1)$ et $F(a_2)$ sont en somme directe et justifier que $F(a_1) \oplus F(a_2) \subsetneq E$.
3. Soit $a_3 \in E$ tel que $a_3 \notin F(a_1) \oplus F(a_2)$.
   Montrer que $E = F(a_1) \oplus F(a_2) \oplus F(a_3)$.
4. Donner une base adaptée à la décomposition $E = F(a_1) \oplus F(a_2) \oplus F(a_3)$ et déterminer la matrice de f dans cette base.

d) Projecteurs et symétries

Définition 26

Hyp. : On suppose que F et G sont supplémentaires dans E.

- On appelle *projecteur sur F parallèlement à G* l'application p de E dans E qui à un vecteur w de E s'écrivant $w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$ associe le vecteur $p(w) = u$.
- On appelle *symétrie par rapport à F parallèlement à G* l'application s de E dans E qui à un vecteur w de E s'écrivant $w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$ associe le vecteur $s(w) = u - v$.

- Si $E = F \oplus G$ alors définir une application linéaire sur E est équivalent à la définir sur F et sur G.
  Ici, p est l'endomorphisme défini par $p_{|F} = \mathrm{Id}_F$ et $p_{|G} = 0_{\mathscr{L}(G)}$ et s par $s_{|F} = \mathrm{Id}_F$ et $s_{|G} = -\mathrm{Id}_G$.
- Si p est la projection sur F parallèlement à G alors $\mathrm{Id}_E - p$ est celle sur G parallèlement à F et $2p - \mathrm{Id}_E$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Théorème 27

- p est un projecteur si et seulement si p est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$.
- s est une symétrie si et seulement si s est un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

- Si p est un projecteur alors p est le projecteur sur $F = \mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(p)$.
- Si s est une symétrie alors s est la symétrie par rapport à $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

IV. Représentation matricielle

Dans ce paragraphe, E et F désignent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
On note p la dimension de E et q celle de F.

A. Correspondances vectoriel / matriciel

Une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F étant fixées, tout problème vectoriel (avec des vecteurs et des applications linéaires de E dans F) peut être ramené à un problème matriciel (avec des matrices-colonnes et des matrices de taille $q \times p$).
Pour cela, on fait correspondre :

- à chaque vecteur de E (respectivement F) le vecteur-colonne de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ (respectivement $\mathscr{C}$),
- à chaque application linéaire de E dans F sa matrice dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

Deux bases étant fixées, correspondances vectoriel / matriciel

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, f_2, \dots, f_q)$ une base de F.
Il existe un isomorphisme entre E et $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, entre F et $\mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ et entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ permettant les correspondances suivantes.

- *Vecteur :* $u \in E$

$$\exists!(u_1, u_2, \dots, u_p) \in \mathbb{K}^p \;/\; u = \sum_{i=1}^{p} u_i e_i$$

- *Vecteur-colonne :* $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

$$X = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} \text{ : coordonnées de } u \text{ dans la base } \mathscr{B}$$

$$\hookrightarrow X = Mat_{\mathscr{B}}(u)$$

- *Application linéaire :* $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$

$$\forall j \in \{1, \dots, p\},\ \exists!(a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{q,j}) \in \mathbb{K}^q \;/\; \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{i,j} f_i$$

- *Matrice :* $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$

$\forall j \in \{1, \dots, p\}$, j-ème colonne de A : coordonnées de $\varphi(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$

$$A = \begin{array}{c} \varphi(e_j) \\ \begin{pmatrix} \vdots & a_{1,j} & \vdots \\ \vdots & a_{2,j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_{q,j} & \vdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_q \end{array}$$

$$\hookrightarrow A = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\varphi)$$

- *Évaluation de φ en u :*

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} u_j \right) f_i$$

- *Produit matriciel de A par X :*

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1,j} u_j \\ \sum_{j=1}^{p} a_{2,j} u_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{n,j} u_j \end{pmatrix} \text{ : coordonnées de } \varphi(u) \text{ dans la base } \mathscr{C}$$

$$\hookrightarrow AX = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\varphi) Mat_{\mathscr{B}}(u) = Mat_{\mathscr{C}}(\varphi(u))$$

Notons que ces correspondances préservent les notions de sous-espace vectoriel, famille libre, famille génératrice, base, dimension, rang.
On a notamment $\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\varphi))$.

Cas particulier $E = F$: Correspondance endomorphisme / matrice carrée.

Cas particulier $E = \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $F = \mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{K})$, $\mathscr{B}$ base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $\mathscr{C}$ base canonique de $\mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{K})$:
Dans ce cas, tout vecteur-colonne est égal au vecteur de ses coordonnées. Les correspondances signalées ci-dessus sont des égalités.

Réciproquement, si l'on dispose d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et que l'on préfère travailler avec une application linéaire, on peut considérer *l'application linéaire de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associée à A* c'est-à-dire l'application :

$$\varphi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

C'est l'application linéaire de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ qui a pour matrice A dans les bases canoniques de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{K})$.
Si A est une matrice carrée, φ_A est *l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à A*.

On peut aussi considérer *l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^q$ canoniquement associée à A* : c'est l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^q$ qui a pour matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^q$.

B. Changement de base

Définition 28

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E (espace vectoriel de dimension n).
On appelle *matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$* et on note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = Mat_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & e'_j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vdots & p_{1,j} & \vdots \\ \vdots & p_{2,j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & p_{n,j} & \vdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} .$$

On rappelle que $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible et $\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.

Exemple 12 : Soit $a_0, \dots, a_n$ $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.
On note $\mathscr{B}$ la base des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $a_0, \dots, a_n$ et $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, écrire la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$.

Théorème 29

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F.
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$.
On a alors :

$$Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(\varphi) = P_{\mathscr{C}',\mathscr{C}} Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\varphi) P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}.$$

Cas particulier des endomorphismes :
Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.
On a :

$$Mat_{\mathscr{B}'}(\varphi) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} Mat_{\mathscr{B}}(\varphi) P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right)^{-1} Mat_{\mathscr{B}}(\varphi) P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}.$$

Exemple 13 : On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$.

   Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^3$ de deux façons : en utilisant les correspondances vectoriel / matriciel puis en utilisant les matrices de passage.

C. Matrices semblables

Ici, n désigne un entier naturel non nul.

Définition 30

Soit A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A *est semblable à* B lorsqu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PBP^{-1}$.

Proposition 31

La relation de *similitude* vérifie les propriétés suivantes pour toutes matrices A, B et C :

- A est semblable à A,
- A est semblable à B si et seulement si B est semblable à A,
- si A est semblable à B et B est semblable à C alors A est semblable à C.

Comme l'ordre n'a pas d'importance, on dira aussi :

« les matrices A et B sont semblables ».

Théorème 32

Deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n dans deux bases.

Exemple 14 : Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Proposition 33

Deux matrices semblables ont le même rang, le même déterminant et la même trace.

Définition/Proposition 34

Soit φ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

- Toutes les matrices représentant φ ont le même déterminant : cette valeur commune est appelée le *déterminant de* φ et est notée $\det(\varphi)$.
- Toutes les matrices représentant φ ont la même trace : cette valeur commune est appelée la *trace de* φ et est notée $\mathrm{tr}(\varphi)$.

Exemple 15 : Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Proposition 35

Soit A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$.
Si $A = PBP^{-1}$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = PB^pP^{-1}$.

D. Sous-espaces stables

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Définition et exemples

Définition 36

Soit φ un endomorphisme de E. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

- On dit que F est *stable par* φ lorsque $\varphi(F) \subset F$ c'est-à-dire $\forall u \in F$, $\varphi(u) \in F$.
- L'application $\varphi_F : \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & \varphi(u) \end{array} \right.$ est alors un endomorphisme de F appelé *endomorphisme induit par* φ *sur* F.

Exemples : Les sous-espaces $\{0_E\}$ et E sont stables par n'importe quel endomorphisme φ.

Exemple 16 : Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Soit $a \in E$. On note $D = \mathrm{Vect}(a)$.
Montrer que D est stable par φ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi(a) = \lambda a$.
Déterminer dans ce cas l'endomorphisme induit par φ sur D.

Proposition 37

Soit φ et ψ deux endomorphismes de E.
Si φ et ψ commutent alors $\mathrm{Ker}(\psi)$ est stable par φ.

Exemple : En particulier, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est stable par φ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(\varphi^n)$ est stable par φ.

2. Représentation matricielle

On suppose que E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 38

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F c'est-à-dire telle que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) F est stable par φ,

(ii) la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ est triangulaire par blocs : $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & C \end{array}\right)$ où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

Dans ce cas, A est la matrice de φ_F dans la base $(e_1, \dots, e_p)$.

Théorème 39

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

Soit $F_1, \ldots, F_p$ p sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$ (concaténation de $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p$ où pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\mathscr{B}_k$ est une base de F_k).

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $F_1, \ldots, F_p$ sont tous stables par φ,

(ii) la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale par blocs :

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & (0) & \cdots & (0) \\ \hline (0) & A_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ \hline (0) & \cdots & (0) & A_p \end{array}\right) \text{ où pour tout } k \in [\![1,p]\!],\ A_k \in \mathscr{M}_{\dim F_k}(\mathbb{K}).$$

Dans ce cas, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, A_k est la matrice de φ_{F_k} dans la base $\mathscr{B}_k$.

Exemple 17 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$.
Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ puis donner la forme de la matrice de f dans une base adaptée à cette décomposition.

V. Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

A. Définition

Définition 40

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On note $P = \sum_{k=0}^{d} \lambda_k X^k$ où $d \in \mathbb{N}$.

- Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

  On note $P(\varphi)$ l'endomorphisme de E défini par $P(\varphi) = \sum_{k=0}^{d} \lambda_k \varphi^k$,

  où $\varphi^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{k \text{ termes}}$.

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

  On note $P(A)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $P(A) = \sum_{k=0}^{d} \lambda_k A^k$,

  où $A^0 = I_n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ termes}}$.

Exemple : Soit $P = X^2 + 3X - 10$.
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. On a $P(\varphi) = \varphi^2 + 3\varphi - 10\mathrm{Id}_E$.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a $P(A) = A^2 + 3A - 10I_n$.

Attention, pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ et $u \in E$, l'expression $\big(P(\varphi)\big)(u)$ a un sens (c'est un vecteur de E) mais l'expression $P\big(\varphi(u)\big)$ n'a pas de sens !

B. Propriétés

Proposition 41

Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

- Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.
  On a :
$$(\alpha P + Q)(\varphi) = \alpha P(\varphi) + Q(\varphi) \text{ et } (P \times Q)(\varphi) = P(\varphi) \circ Q(\varphi).$$
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
  On a :
$$(\alpha P + Q)(A) = \alpha P(A) + Q(A) \text{ et } (P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A).$$

Il est important de bien identifier les objets mathématiques concernés.
Notamment dans les assertions : $(\underbrace{P \times Q}_{\text{produit de polynômes}})(\varphi) = \underbrace{P(\varphi) \circ Q(\varphi)}_{\text{composition d'endomorphismes}}$ et $(\underbrace{P \times Q}_{\text{produit de polynômes}})(A) = \underbrace{P(A) \times Q(A)}_{\text{produit de matrices}}$.

Exemple (suite) :
Comme $P = (X+5)(X-2)$, on a $P(\varphi) = (\varphi + 5\mathrm{Id}_E) \circ (\varphi - 2\mathrm{Id}_E)$ et $P(A) = (A + 5I_n)(A - 2I_n)$.

Corollaire 42

- Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.
  Deux polynômes de l'endomorphisme φ commutent :
$$\forall (P,Q) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2,\ P(\varphi) \circ Q(\varphi) = Q(\varphi) \circ P(\varphi).$$
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
  Deux polynômes de la matrice A commutent :
$$\forall (P,Q) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2,\ P(A)Q(A) = Q(A)P(A).$$

Conséquence : Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Comme $P(\varphi)$ et φ commutent, $\mathrm{Ker}(P(\varphi))$ est stable par φ.

Proposition 43

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E (supposé de dimension finie).
Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P(\varphi))$.

C. Polynômes annulateurs

Définition 44

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. On dit que P est un *polynôme annulateur de* φ lorsque $P(\varphi) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que P est un *polynôme annulateur de* A lorsque $P(A) = 0_n$.

Exemple 18 :

1. Déterminer un polynôme annulateur non nul d'une homothétie, d'un projecteur et d'une symétrie.
2. Soit D une matrice diagonale de cœfficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
   Déterminer un polynôme annulateur non nul de D.

Exemple 19 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un polynôme annulateur non nul de A de degré inférieur ou égal à 2.

2. *Application à l'inversibilité*
   Montrer que A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} comme un polynôme en A.

> *Méthode :* Si l'on dispose d'un polynôme P annulateur de A ayant un terme constant λ_0 non nul, partant de l'égalité $P(A) = 0_n$, on isole le terme $\lambda_0 I_n$ et on met A en facteur de façon à obtenir une expression du type $AB = I_n$. Alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

3. *Application au calcul des puissances*
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) À l'aide du théorème de division euclidienne, montrer qu'il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X^n = PQ_n + a_n X + b_n$ puis déterminer a_n et b_n.
   (b) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

> *Méthode :* Si l'on dispose d'un polynôme P non nul annulateur de A, pour calculer A^n :
> — on effectue la division euclidienne de X^n par P, en notant R le reste, on a alors $A^n = R(A)$,
> — on utilise les racines de P pour obtenir les cœfficients de R et en déduire explicitement $R(A)$.

Remarquons que si P est scindé à racines simples $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ alors R est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à $p-1$ tel que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $R(\alpha_k) = \alpha_k^n$ (*problème d'interpolation de Lagrange*).

Ces méthodes s'appliquent également pour déterminer φ^{-1} et φ^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour un endomorphisme φ.

Proposition 45

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie.
P est un polynôme annulateur de φ si et seulement si P est un polynôme annulateur de sa matrice dans une base quelconque.