
COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Cours

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

I. COMPLÉMENTS SUR LES MATRICES

A. TRACE D'UNE MATRICE CARRÉE

Dans ce paragraphe, n désigne un entier naturel non nul.

Définition 1

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle *trace de A* et on note $\text{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de la matrice A , c'est-à-dire :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Exemple 1 : Calculer la trace de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et donner $\text{tr}(I_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 2

- ▶ L'application $\text{tr} : \begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \text{tr}(A) \end{matrix}$ est une forme linéaire.
- ▶ Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$.
- ▶ Pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, on a $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Attention, en général, $\text{tr}(AB) \neq \text{tr}(A)\text{tr}(B)$.

Exemple 2 : Déterminer deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\text{tr}(AB) \neq \text{tr}(A)\text{tr}(B)$.

Exemple 3 : Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Exemple 4 : Déterminer la dimension de $\text{Ker}(\text{tr})$ et montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(\text{tr}) \oplus \text{Vect}(I_n)$.

B. MATRICES PAR BLOCS

Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Soit $(p_1, p_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $p_1 + p_2 = p$ et $(q_1, q_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $q_1 + q_2 = q$.

On définit quatre sous-matrices de A : $A_{1,1} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p_1 \\ 1 \leq j \leq q_1}} \in \mathcal{M}_{p_1,q_1}(\mathbb{K})$, $A_{1,2} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p_1 \\ q_1+1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p_1,q_2}(\mathbb{K})$,
 $A_{2,1} = (a_{i,j})_{\substack{p_1+1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q_1}} \in \mathcal{M}_{p_2,q_1}(\mathbb{K})$ et $A_{2,2} = (a_{i,j})_{\substack{p_1+1 \leq i \leq p \\ q_1+1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p_2,q_2}(\mathbb{K})$.

On peut alors écrire $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array} \right)$ et on dit que la matrice A est définie *par blocs*.

Exemple 5 : On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = I_3$, $D = 0_{3,2}$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$.

Donner explicitement M .

Proposition 3 (Transposition)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ définie par blocs : $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array} \right)$.

On a :

$$A^T = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1}^T & A_{2,1}^T \\ \hline A_{1,2}^T & A_{2,2}^T \end{array} \right).$$

Exemple 5 (suite) : Pour la matrice M définie ci-dessus, calculer M^T .

Proposition 4 (Combinaison linéaire)

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, définies par blocs selon le même découpage ($p = p_1 + p_2, q = q_1 + q_2$) :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array} \right) \text{ et } B = \left(\begin{array}{c|c} B_{1,1} & B_{1,2} \\ \hline B_{2,1} & B_{2,2} \end{array} \right).$$

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda A + B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda A_{1,1} + B_{1,1} & \lambda A_{1,2} + B_{1,2} \\ \hline \lambda A_{2,1} + B_{2,1} & \lambda A_{2,2} + B_{2,2} \end{array} \right)$.

Proposition 5 (Produit)

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.

On suppose que A et B sont définies par blocs et que le découpage en colonnes de A est le même que le découpage en lignes de B ($q = q_1 + q_2$).

Alors $AB = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} B_{1,1} & B_{1,2} \\ \hline B_{2,1} & B_{2,2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \\ \hline A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} \end{array} \right)$.

Exemple 6 : On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On peut généraliser ceci à un nombre quelconque de blocs : $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,m} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,m} \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,m} \end{array} \right)$.

On retiendra que :

- ▶ lors de la transposition, les blocs des lignes et colonnes sont échangés et transposés,
- ▶ pour la combinaison linéaire, le découpage par blocs des matrices en jeu doit être le même (blocs de même taille),
- ▶ pour le produit AB , le découpage selon les colonnes de A doit être le même que le découpage selon les lignes de B .

Lorsque $n = m$, on appelle :

- ▶ matrice *triangulaire (supérieure) par blocs* toute matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ \hline (0) & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline (0) & \cdots & (0) & A_{n,n} \end{array} \right)$
- ▶ matrice *diagonale par blocs* toute matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & (0) & \cdots & (0) \\ \hline (0) & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ \hline (0) & \cdots & (0) & A_{n,n} \end{array} \right)$.

C. COMPLÉMENTS SUR LES DÉTERMINANTS

Proposition 6 (Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs)

Si $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \hline 0 & \cdots & 0 & A_p \end{array} \right)$ est une matrice triangulaire par blocs telle que pour tout

$k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, A_k est une matrice carrée, alors $\det(A) = \prod_{k=1}^p \det(A_k)$.

Attention, en général, $\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \neq \det(A)\det(D) - \det(C)\det(B)$.

Définition/Proposition 7 (Déterminant de Vandermonde)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

- ▶ On appelle *déterminant de Vandermonde du n -uplet (x_1, \dots, x_n)* le nombre :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

- ▶ On a $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Notons que si (x_1, \dots, x_n) est un n -uplet de nombres distincts deux à deux alors $V(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Exemple 7 : Problème d'interpolation de Lagrange

On considère $n + 1$ points de \mathbb{R}^2 notés A_0, \dots, A_n .

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note (a_k, b_k) les coordonnées du point A_k dans la base canonique et on suppose que les réels a_0, \dots, a_n sont deux à deux distincts.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à n dont la courbe représentative passe par les points A_0, \dots, A_n .
2. Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$$

En écrivant la matrice de l'application linéaire φ dans les bases canoniques, retrouver le résultat de la question précédente.

II. COMPLÉMENTS SUR LES POLYNÔMES

Ici, n désigne un entier naturel et a_0, \dots, a_n sont $n + 1$ éléments de \mathbb{K} **deux à deux distincts**.

Définition 8

On appelle *polynômes interpolateurs de Lagrange associés à a_0, \dots, a_n* les polynômes L_0, \dots, L_n définis par :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{X - a_k}{a_i - a_k}.$$

Notons que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, L_i est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $\frac{1}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (a_i - a_k)}$.

Proposition 9

- ▶ On a pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j} \stackrel{def.}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$
- ▶ La famille (L_0, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et on a pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$:

$$P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i.$$

- ▶ En particulier, on a $\sum_{i=0}^n L_i = 1$.

Exemple 7 (suite) : Problème d'interpolation de Lagrange

Donner une expression, à l'aide des polynômes interpolateurs de Lagrange, de l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n dont la courbe représentative passe par les points A_0, \dots, A_n .

III. COMPLÉMENTS SUR LES ESPACES VECTORIELS

A. PRODUIT D'ESPACES VECTORIELS

1. PRODUIT DE DEUX ESPACES VECTORIELS

On rappelle que le produit cartésien de deux ensembles A et B est l'ensemble de tous les couples dont la première composante appartient à A et la seconde à B .

$$A \times B = \{(u, v) \mid u \in A \text{ et } v \in B\}.$$

Lorsque $A = B$, on note cet ensemble A^2 .

Définition/Proposition 10

Soit $(E, +, \cdot)$ et $(F, \hat{+}, \hat{\cdot})$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Si on pose :

- ▶ $\forall (u, v) \in E \times F, \forall (u', v') \in E \times F, (u, v) \check{+} (u', v') = (u + u', v \hat{+} v')$
- ▶ $\forall (u, v) \in E \times F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \check{\cdot} (u, v) = (\lambda \cdot u, \lambda \hat{\cdot} v)$

alors $(E \times F, \check{+}, \check{\cdot})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel appelé *espace vectoriel produit de E et F* .

Proposition 11

Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie alors $E \times F$ est de dimension finie et on a :

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F).$$

2. GÉNÉRALISATION À UN NOMBRE FINI D'ESPACES VECTORIELS

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que le produit cartésien de p ensembles A_1, \dots, A_p est l'ensemble de tous les p -uplets où pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la i ème composante appartient à A_i .

$$\prod_{i=1}^p A_i = \{(u_1, \dots, u_p) \mid \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, u_i \in A_i\}.$$

Lorsque $A_1 = A_2 = \dots = A_p$, on note cet ensemble A^p .

Pour simplifier, on utilise ci-dessous une unique notation pour l'addition et pour la multiplication externe, sans distinction selon les espaces vectoriels considérés.

Définition/Proposition 12

Soit E_1, \dots, E_p p \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Si on pose :

- ▶ $\forall (u_1, \dots, u_p) \in \prod_{i=1}^p E_i, \forall (u'_1, \dots, u'_p) \in \prod_{i=1}^p E_i : (u_1, \dots, u_p) + (u'_1, \dots, u'_p) = (u_1 + u'_1, \dots, u_p + u'_p)$
- ▶ $\forall (u_1, \dots, u_p) \in \prod_{i=1}^p E_i, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda \cdot (u_1, \dots, u_p) = (\lambda \cdot u_1, \dots, \lambda \cdot u_p)$

alors $\left(\prod_{i=1}^p E_i, +, \cdot \right)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel appelé *espace vectoriel produit des E_1, \dots, E_p* .

Proposition 13

Si E_1, \dots, E_p sont des espaces vectoriels de dimension finie alors $\prod_{i=1}^p E_i$ est de dimension finie et on a :

$$\dim\left(\prod_{i=1}^p E_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim(E_i).$$

Exemple : \mathbb{C}^n est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n et un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $2n$.

B. SOMME DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

On généralise dans ce paragraphe la notion de somme de deux sous-espaces vectoriels (étudiée en PCSI) à un nombre fini de sous-espaces vectoriels.

Dans ce paragraphe, E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel et F_1, \dots, F_p p sous-espaces vectoriels de E (où $p \in \mathbb{N}^*$).

a) SOMME D'UN NOMBRE FINI DE SOUS-ESPACES VECTORIELS**Définition 14**

On appelle *somme des* F_1, \dots, F_p et on note $\sum_{i=1}^p F_i$ l'ensemble des vecteurs w de E pouvant s'écrire $w = \sum_{i=1}^p u_i$ avec pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u_i \in F_i$.

Ainsi :

$$\sum_{i=1}^p F_i = \left\{ w \in E \mid \exists (u_1, \dots, u_p) \in \prod_{i=1}^p F_i \text{ tel que } w = \sum_{i=1}^p u_i \right\}.$$

Notons qu'on a $(F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + F_2 + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3)$.

La somme est associative : la somme d'un nombre fini de sous-espaces est inchangée par l'ajout ou le retrait de paires de parenthèses.

Proposition 15

La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\bigcup_{i=1}^p F_i$.

Si G est un sous-espace vectoriel de E alors on a l'équivalence :

$$\left[\sum_{i=1}^p F_i \subset G \right] \Leftrightarrow \left[\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, F_i \subset G \right]$$

Théorème 16

Hyp. On suppose que F_1, \dots, F_p sont de dimension finie.

► Alors $\sum_{i=1}^p F_i$ est de dimension finie et on a :

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i).$$

► *Cas particulier $p = 2$: Formule de Grassmann*

On a :

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2).$$

b) NOTION DE SOMME DIRECTE

Définition 17

La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est dite *directe* lorsque pour tout $w \in \sum_{i=1}^p F_i$, il existe un unique p -uplet

$(u_1, \dots, u_p) \in \prod_{i=1}^p F_i$ tel que $w = \sum_{i=1}^p u_i$.

Dans ce cas, la somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est aussi notée $\bigoplus_{i=1}^p F_i$.

La somme directe est également associative.

Proposition 18 (*Caractérisation de la somme directe dans le cas particulier $p = 2$*)

La somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Attention, pour $p \geq 3$, on ne dispose plus d'une caractérisation de la somme directe par une intersection réduite au vecteur nul et il ne suffit pas que les F_i soient deux à deux en somme directe pour que la somme de tous les F_i soit directe.

Exemple 8 : Dans $E = \mathbb{R}^2$, on considère $F = \text{Vect}((1, 0))$, $G = \text{Vect}((0, 1))$ et $H = \text{Vect}((1, 1))$.

Montrer que les sous-espaces vectoriels F , G et H sont deux à deux en somme directe mais que la somme $F + G + H$ n'est pas directe.

Proposition 19 (*Caractérisation de la somme directe dans le cas général*)

La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe si et seulement si :

$$\forall (u_1, \dots, u_p) \in \prod_{i=1}^p F_i, \left(\sum_{i=1}^p u_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, u_i = 0_E \right).$$

Proposition 20

Hyp. On suppose que F_1, \dots, F_p sont de dimension finie.

La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe si et seulement si $\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$.

c) DÉCOMPOSITION DE E EN SOMME DIRECTE DE SOUS-ESPACES VECTORIELS**Définition 21**

On dit que F_1, \dots, F_p sont *supplémentaires dans E* lorsque $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$.

$$E = \bigoplus_{i=1}^p F_i \quad \text{signifie} \quad E = \sum_{i=1}^p F_i \quad \text{et la somme} \quad \sum_{i=1}^p F_i \quad \text{est directe}$$

ou encore tout élément w de E peut s'écrire de manière unique sous la forme $w = \sum_{i=1}^p u_i$ avec pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u_i \in F_i$.

► Attention de ne pas confondre les termes *complémentaire* et *supplémentaire*.

Si F est un sous-ensemble de E alors le complémentaire de F dans E est par définition :

$$E \setminus F = \{u \in E, u \notin F\}.$$

Il vérifie comme propriété $F \cup (E \setminus F) = E$.

On peut noter que si F est un sous-espace vectoriel de E alors $E \setminus F$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E car il ne contient pas 0_E .

Exemple 9 : Soit $E = \mathbb{R}^2$. On considère la droite vectorielle $D = \text{Vect}((1, 1))$.

Représenter graphiquement D , le complémentaire de D et un supplémentaire de D .

Déterminer tous les supplémentaires de D .

► Pour montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$, on pourra procéder par analyse-synthèse (*cf. exemple 10*) ou utiliser les *Propositions 22* et *23* lorsque l'espace vectoriel E est de dimension finie.

Exemple 10 : Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On note F le sous-ensemble de E formé des fonctions paires et G celui formé des fonctions impaires.

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

Proposition 22

Hyp. On suppose que E est de dimension finie.

Si deux des trois assertions suivantes sont vérifiées :

$$(i) E = \sum_{i=1}^p F_i \quad (ii) \text{ la somme } \sum_{i=1}^p F_i \text{ est directe} \quad (iii) \dim(E) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$

alors $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$.

Proposition 23

Hyp. On suppose que E est de dimension finie.

$E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ si et seulement si la concaténation d'une base de chaque F_i donne une base de E .

Conséquence : On obtient une décomposition de E en somme directe de sous-espaces vectoriels en réalisant une partition d'une base de E et en considérant les sous-espaces vectoriels engendrés par les vecteurs correspondants à chaque partie.

Par exemple, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , en notant $F_1 = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $F_2 = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ ($1 \leq p \leq n$) alors on a $E = F_1 \oplus F_2$.

Définition 24

Hyp. On suppose que E est de dimension finie.

- ▶ On appelle *base de E adaptée à la décomposition* $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ toute base de E telle que les premiers vecteurs forment une base de F_1 , les suivants une base de F_2, \dots , et les derniers une base de F_p .
- ▶ On appelle *base de E adaptée au sous-espace vectoriel F* toute base de E telle que les premiers vecteurs forment une base de F .

Pour obtenir une base de E adaptée à un sous-espace vectoriel $F \neq \{0_E\}$, il suffit de considérer une base de F , qui est alors une famille libre de E , que l'on complète en une base de E par le théorème de la base incomplète.

Proposition 25

Hyp. On suppose que E est de dimension finie.

Tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.

Exemple 11 : Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 6.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\text{Id}_E$.

Pour tout $a \in E$, on note $F(a) = \text{Vect}(a, f(a))$.

1. Soit a un vecteur non nul de E . Montrer que la famille $(a, f(a))$ est libre.

2. Soit $(a_1, a_2) \in E^2$ avec $a_1 \neq 0_E$ et $a_2 \notin F(a_1)$.
Montrer que $F(a_1)$ et $F(a_2)$ sont en somme directe et justifier que $F(a_1) \oplus F(a_2) \subsetneq E$.
3. Soit $a_3 \in E$ tel que $a_3 \notin F(a_1) \oplus F(a_2)$.
Montrer que $E = F(a_1) \oplus F(a_2) \oplus F(a_3)$.
4. Donner une base adaptée à la décomposition $E = F(a_1) \oplus F(a_2) \oplus F(a_3)$ et déterminer la matrice de f dans cette base.

d) PROJECTEURS ET SYMÉTRIES

Définition 26

Hyp. : On suppose que F et G sont supplémentaires dans E .

- ▶ On appelle *projecteur sur F parallèlement à G* l'application p de E dans E qui à un vecteur w de E s'écrivant $w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$ associe le vecteur $p(w) = u$.
- ▶ On appelle *symétrie par rapport à F parallèlement à G* l'application s de E dans E qui à un vecteur w de E s'écrivant $w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$ associe le vecteur $s(w) = u - v$.

- ▶ Si $E = F \oplus G$ alors définir une application linéaire sur E est équivalent à la définir sur F et sur G .
Ici, p est l'endomorphisme défini par $p|_F = \text{Id}_F$ et $p|_G = 0_{\mathcal{L}(G)}$ et s par $s|_F = \text{Id}_F$ et $s|_G = -\text{Id}_G$.
- ▶ Si p est la projection sur F parallèlement à G alors $\text{Id}_E - p$ est celle sur G parallèlement à F et $2p - \text{Id}_E$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Théorème 27

- ▶ p est un projecteur si et seulement si p est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$.
- ▶ s est une symétrie si et seulement si s est un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = \text{Id}_E$.

- ▶ Si p est un projecteur alors p est le projecteur sur $F = \text{Im}(p)$ parallèlement à $G = \text{Ker}(p)$.
- ▶ Si s est une symétrie alors s est la symétrie par rapport à $F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

IV. REPRÉSENTATION MATRICIELLE

Dans ce paragraphe, E et F désignent deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. On note p la dimension de E et q celle de F .

A. CORRESPONDANCES VECTORIEL / MATRICIEL

Une base \mathcal{B} de E et une base \mathcal{C} de F étant fixées, tout problème vectoriel (avec des vecteurs et des applications linéaires de E dans F) peut être ramené à un problème matriciel (avec des matrices-colonnes et des matrices de taille $q \times p$).

Pour cela, on fait correspondre :

- ▶ à chaque vecteur de E (respectivement F) le vecteur-colonne de ses coordonnées dans la base \mathcal{B} (respectivement \mathcal{C}),
- ▶ à chaque application linéaire de E dans F sa matrice dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} .

DEUX BASES ÉTANT FIXÉES, CORRESPONDANCES VECTORIEL / MATRICIEL

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_q)$ une base de F .
 Il existe un isomorphisme entre E et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, entre F et $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ et entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ permettant les correspondances suivantes.

- ▶ Vecteur : $u \in E$

$$\exists!(u_1, u_2, \dots, u_p) \in \mathbb{K}^p / u = \sum_{i=1}^p u_i e_i$$

- ▶ Application linéaire : $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \exists!(a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{q,j}) \in \mathbb{K}^q / \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^q a_{i,j} f_i$$

- ▶ Évaluation de φ en u :

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^q \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} u_j \right) f_i$$

Notons que ces correspondances préservent les notions de sous-espace vectoriel, famille génératrice, base, dimension, rang.
 On a notamment $\text{rg}(\varphi) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi))$.

Cas particulier $E = F$: Correspondance endomorphisme / matrice carrée.

Cas particulier $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $F = \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$, \mathcal{B} base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, \mathcal{C} base canonique de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$:

Dans ce cas, tout vecteur-colonne est égal au vecteur de ses coordonnées. Les correspondances signalées ci-dessus sont des égalités.

- ▶ Vecteur-colonne : $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

$$X = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} : \text{coordonnées de } u \text{ dans la base } \mathcal{B} \quad \mapsto X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

- ▶ Matrice : $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$

$\forall j \in \{1, \dots, p\}$, j -ème colonne de A : coordonnées de $\varphi(e_j)$ dans la base \mathcal{C}

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & a_{1,j} & \vdots & f_1 \\ \vdots & a_{2,j} & \vdots & f_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_{q,j} & \vdots & f_q \end{pmatrix} \quad \mapsto A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi)$$

- ▶ Produit matriciel de A par X :

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p a_{1,j} u_j \\ \sum_{j=1}^p a_{2,j} u_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p a_{q,j} u_j \end{pmatrix} : \text{coordonnées de } \varphi(u) \text{ dans la base } \mathcal{C} \quad \mapsto AX = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(u))$$

Notons que ces correspondances préservent les notions de sous-espace vectoriel, famille génératrice, base, dimension, rang.

On a notamment $\text{rg}(\varphi) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi))$.

Cas particulier $E = F$: Correspondance endomorphisme / matrice carrée.

Cas particulier $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $F = \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$, \mathcal{B} base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, \mathcal{C} base canonique de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$:

Dans ce cas, tout vecteur-colonne est égal au vecteur de ses coordonnées. Les correspondances signalées ci-dessus sont des égalités.

Réciproquement, si l'on dispose d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et que l'on préfère travailler avec une application linéaire, on peut considérer l'application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associée à A c'est-à-dire l'application :

$$\varphi_A : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{cases}$$

C'est l'application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ qui a pour matrice A dans les bases canoniques de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$.

Si A est une matrice carrée, φ_A est l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à A .

On peut aussi considérer l'application linéaire de \mathbb{K}^p dans \mathbb{K}^q canoniquement associée à A : c'est l'application linéaire de \mathbb{K}^p dans \mathbb{K}^q qui a pour matrice A dans les bases canoniques de \mathbb{K}^p et \mathbb{K}^q .

B. CHANGEMENT DE BASE

Définition 28

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E (espace vectoriel de dimension n). On appelle *matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}'* et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} & e'_j & \\ \vdots & p_{1,j} & \vdots \\ \vdots & p_{2,j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & p_{n,j} & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}.$$

On rappelle que $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

Exemple 12 : Soit a_0, \dots, a_n $n+1$ éléments de \mathbb{K} deux à deux distincts.

On note \mathcal{B} la base des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à a_0, \dots, a_n et \mathcal{C} la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, écrire la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} .

Théorème 29

Soit \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux bases de F .

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

On a alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(\varphi) = P_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

Cas particulier des endomorphismes :

Soit \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

Exemple 13 : On considère les vecteurs de \mathbb{R}^3 suivants : $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

2. On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 ayant pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} .

Déterminer la matrice de f dans la base canonique \mathcal{C} de \mathbb{R}^3 de deux façons : en utilisant les correspondances vectoriel / matriciel puis en utilisant les matrices de passage.

C. MATRICES SEMBLABLES

Ici, n désigne un entier naturel non nul.

Définition 30

Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est semblable à B lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PBP^{-1}$.

Proposition 31

La relation de *similitude* vérifie les propriétés suivantes pour toutes matrices A , B et C :

- ▶ A est semblable à A ,
- ▶ A est semblable à B si et seulement si B est semblable à A ,
- ▶ si A est semblable à B et B est semblable à C alors A est semblable à C .

Comme l'ordre n'a pas d'importance, on dira aussi :

« les matrices A et B sont semblables ».

Théorème 32

Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n dans deux bases.

Exemple 14 : Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Proposition 33

Deux matrices semblables ont le même rang, le même déterminant et la même trace.

Définition/Proposition 34

Soit φ un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

- ▶ Toutes les matrices représentant φ ont le même déterminant : cette valeur commune est appelée le *déterminant de φ* et est notée $\det(\varphi)$.
- ▶ Toutes les matrices représentant φ ont la même trace : cette valeur commune est appelée la *trace de φ* et est notée $\text{tr}(\varphi)$.

Exemple 15 : Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

Proposition 35

Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$.

Si $A = PBP^{-1}$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = PB^pP^{-1}$.

D. SOUS-ESPACES STABLES

Dans ce paragraphe, E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1. DÉFINITION ET EXEMPLES

Définition 36

Soit φ un endomorphisme de E . Soit F un sous-espace vectoriel de E .

- ▶ On dit que F est *stable par φ* lorsque $\varphi(F) \subset F$ c'est-à-dire $\forall u \in F, \varphi(u) \in F$.
- ▶ L'application $\varphi|_F : \begin{array}{c} F \longrightarrow F \\ u \longmapsto \varphi(u) \end{array}$ est alors un endomorphisme de F appelé *endomorphisme induit par φ sur F* .

Exemples : Les sous-espaces $\{0_E\}$ et E sont stables par n'importe quel endomorphisme φ .

Exemple 16 : Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Soit $a \in E$. On note $D = \text{Vect}(a)$.

Montrer que D est stable par φ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi(a) = \lambda a$.

Déterminer dans ce cas l'endomorphisme induit par φ sur D .

Proposition 37

Soit φ et ψ deux endomorphismes de E .

Si φ et ψ commutent alors $\text{Ker}(\psi)$ est stable par φ .

Exemple : En particulier, $\text{Ker}(\varphi)$ est stable par φ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Ker}(\varphi^n)$ est stable par φ .

2. REPRÉSENTATION MATRICIELLE

On suppose que E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 38

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F c'est-à-dire telle que (e_1, \dots, e_p) est une base de F .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) F est stable par φ ,

(ii) la matrice de φ dans la base \mathcal{B} est triangulaire par blocs : $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & C \end{array} \right)$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Dans ce cas, A est la matrice de $\varphi|_F$ dans la base (e_1, \dots, e_p) .

Théorème 39

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

Soit F_1, \dots, F_p p sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$.

Soit \mathcal{B} une base de E adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$ (concaténation de $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ où pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, \mathcal{B}_k est une base de F_k).

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) F_1, \dots, F_p sont tous stables par φ ,
- (ii) la matrice de φ dans la base \mathcal{B} est diagonale par blocs :

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & (0) & \cdots & (0) \\ \hline (0) & A_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ \hline (0) & \cdots & (0) & A_p \end{array} \right) \text{ où pour tout } k \in \llbracket 1, p \rrbracket, A_k \in \mathcal{M}_{\dim F_k}(\mathbb{K}).$$

Dans ce cas, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, A_k est la matrice de $\varphi|_{F_k}$ dans la base \mathcal{B}_k .

Exemple 17 : Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg}(f^2) = \text{rg}(f)$.

Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ puis donner la forme de la matrice de f dans une base adaptée à cette décomposition.

V. POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES ET DE MATRICES CARRÉES

Dans ce paragraphe, E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel.

A. DÉFINITION

Définition 40

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On note $P = \sum_{k=0}^d \lambda_k X^k$ où $d \in \mathbb{N}$.

- Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

On note $P(\varphi)$ l'endomorphisme de E défini par $P(\varphi) = \sum_{k=0}^d \lambda_k \varphi^k$,

où $\varphi^0 = \text{Id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{k \text{ termes}}$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $P(A)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $P(A) = \sum_{k=0}^d \lambda_k A^k$,

où $A^0 = I_n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ termes}}$.

Exemple : Soit $P = X^2 + 3X - 10$.

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. On a $P(\varphi) = \varphi^2 + 3\varphi - 10\text{Id}_E$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $P(A) = A^2 + 3A - 10I_n$.

Attention, pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $u \in E$, l'expression $(P(\varphi))(u)$ a un sens (c'est un vecteur de E) mais l'expression $P(\varphi(u))$ n'a pas de sens !

B. PROPRIÉTÉS

Proposition 41

Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

- ▶ Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

On a :

$$(\alpha P + Q)(\varphi) = \alpha P(\varphi) + Q(\varphi) \text{ et } (P \times Q)(\varphi) = P(\varphi) \circ Q(\varphi).$$

- ▶ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On a :

$$(\alpha P + Q)(A) = \alpha P(A) + Q(A) \text{ et } (P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A).$$

Il est important de bien identifier les objets mathématiques concernés.

Notamment dans les assertions : $(\underbrace{P \times Q}_{\text{produit de polynômes}})(\varphi) = \underbrace{P(\varphi) \circ Q(\varphi)}_{\text{composition d'endomorphismes}}$ et $(\underbrace{P \times Q}_{\text{produit de polynômes}})(A) = \underbrace{P(A) \times Q(A)}_{\text{produit de matrices}}$.

Exemple (suite) :

Comme $P = (X + 5)(X - 2)$, on a $P(\varphi) = (\varphi + 5\text{Id}_E) \circ (\varphi - 2\text{Id}_E)$ et $P(A) = (A + 5I_n)(A - 2I_n)$.

Corollaire 42

- ▶ Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

Deux polynômes de l'endomorphisme φ commutent :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, P(\varphi) \circ Q(\varphi) = Q(\varphi) \circ P(\varphi).$$

- ▶ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Deux polynômes de la matrice A commutent :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, P(A)Q(A) = Q(A)P(A).$$

Conséquence : Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Comme $P(\varphi)$ et φ commutent, $\text{Ker}(P(\varphi))$ est stable par φ .

Proposition 43

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base de E (supposé de dimension finie).

Si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(\varphi))$.

Définition 44

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- ▶ Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. On dit que P est un *polynôme annulateur de φ* lorsque $P(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- ▶ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que P est un *polynôme annulateur de A* lorsque $P(A) = 0_n$.

Exemple 18 :

1. Déterminer un polynôme annulateur non nul d'une homothétie, d'un projecteur et d'une symétrie.
2. Soit D une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Déterminer un polynôme annulateur non nul de D .

Exemple 19 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un polynôme annulateur non nul de A de degré inférieur ou égal à 2.
2. Application à l'inversibilité
Montrer que A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} comme un polynôme en A .

Méthode : Si l'on dispose d'un polynôme P annulateur de A ayant un terme constant λ_0 non nul, partant de l'égalité $P(A) = 0_n$, on isole le terme $\lambda_0 I_n$ et on met A en facteur de façon à obtenir une expression du type $AB = I_n$. Alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

3. Application au calcul des puissances
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- (a) À l'aide du théorème de division euclidienne, montrer qu'il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X^n = PQ_n + a_n X + b_n$ puis déterminer a_n et b_n .
- (b) En déduire l'expression de A^n en fonction de n .

Méthode : Si l'on dispose d'un polynôme P non nul annulateur de A , pour calculer A^n :
 — on effectue la division euclidienne de X^n par P , en notant R le reste, on a alors $A^n = R(A)$,
 — on utilise les racines de P pour obtenir les coefficients de R et en déduire explicitement $R(A)$.

Remarquons que si P est scindé à racines simples $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ alors R est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à $p-1$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $R(\alpha_k) = \alpha_k^n$ (*problème d'interpolation de Lagrange*).

Ces méthodes s'appliquent également pour déterminer φ^{-1} et φ^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour un endomorphisme φ .

Proposition 45

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.

P est un polynôme annulateur de φ si et seulement si P est un polynôme annulateur de sa matrice dans une base quelconque.