RAPPELS ET COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercices

1 *Noyau, image et rang d'une matrice*

Déterminer une base du noyau, une base de l'image et le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2 *Matrices stochastiques*

Soit n un entier naturel non nul.
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice A est *stochastique* lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

1. Soit $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur-colonne dont tous les cœfficients sont égaux à 1.
   Montrer l'équivalence :
   $$AU = U \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$
2. Soit A et B deux matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que leur produit AB est une matrice stochastique.

3 *Matrices à diagonales strictement dominantes*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$. On note $\|X\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.
   Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}|.|x_i| \leqslant \|X\|_\infty \sum\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} |a_{i,j}|$.
2. On suppose que A est *à diagonale strictement dominante* c'est-à-dire qu'elle vérifie :
   $$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \ |a_{i,i}| > \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} |a_{i,j}|.$$
   Montrer que la matrice A est inversible.

4 *Autour de la trace*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que si $\mathrm{tr}(A^\top A) = 0$ alors $A = 0$.
2. Soit A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   Montrer que si $AB - BA = A$ alors A n'est pas inversible.

$\boxed{5}$ *Matrices de rang 1*
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$.

1. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A.
   Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $\ell_j \in \mathbb{K}$ tel que $C_j = \ell_j C_i$.
   En déduire qu'il existe $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, C et L non nulles, telles que $A = CL$.
2. Montrer que $LC = \mathrm{tr}(A)$ et en déduire que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$.

$\boxed{6}$ *Formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à travers lesquelles le produit matriciel commute*
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

1. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de taille $n \times n$ dont tous les cœfficients sont nuls sauf celui placé sur la ligne i et la colonne j qui vaut 1.
   Soit $(i, j, k, l) \in [\![1, n]\!]^4$. Calculer $E_{i,j}E_{k,l}$.
2. Soit f une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant :
$$\forall (A, B) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\big)^2,\ f(AB) = f(BA).$$
   (a) Montrer que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on a $f(E_{i,j}) = 0$ et $f(E_{i,i}) = f(E_{j,j})$.
   (b) En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f = a\mathrm{tr}$ où tr désigne l'application trace.

$\boxed{7}$ *Calculs de déterminants*
Calculer les déterminants suivants en essayant de limiter les calculs. Les paramètres sont des réels. Les deux derniers déterminants sont de taille $n \in \mathbb{N}^*$. Pour calculer le déterminant tridiagonal Δ_n, on pourra montrer que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & j & j^2 \\ j^2 & 1 & j \\ j & j^2 & 1 \end{vmatrix} \text{ où } j = e^{2i\pi/3} \qquad B = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & & \iddots & a_{n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \iddots & & \vdots \\ a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix} \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}_{[n]}$$

$\boxed{8}$ *Exemple de déterminant d'une matrice à cœfficients polynômiaux*
Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $A(x)$ la matrice carrée d'ordre n dont le terme général est $a_{i,j} + x$.
   Montrer que la fonction $x \mapsto \det\big(A(x)\big)$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 1.
2. *Application :* Soit a et b deux réels distincts. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.
   Déterminer la valeur du déterminant :
$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & a & \cdots & a \\ b & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \lambda_n \end{vmatrix}$$

9 *Matrices-blocs*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

1. Déterminer $\det(B)$ en fonction de $\det(A)$.
2. Montrer que B est inversible si et seulement si A l'est et déterminer B^{-1} en fonction de A^{-1}.
3. Calculer B^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

---

10 *Matrices-blocs*

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ avec $ac \neq 0$.

On note $P = \left(\begin{array}{c|c} aM & bM \\ \hline cM & dM \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

En écrivant P comme le produit de deux matrices, calculer le déterminant de P.

---

11 *Révisions sur les sous-espaces vectoriels*

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, en déterminer une base et préciser leur dimension.

$$A = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad B = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z+t = 0\right\}, \quad C = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(1) = 0\}\ (n \in \mathbb{N}^*)$$

---

12 *Supplémentarité de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note :

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ M^\top = M\} \text{ et } \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ M^\top = -M\}$$

1. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminer leurs dimensions.
2. On note p la projection sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ et s la symétrie par rapport à $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
   Déterminer $p(M)$ et $s(M)$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

---

13 *Condition nécessaire et suffisante pour avoir Ker(f) et Im(f) supplémentaires*

Soit f un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie.

Montrer que :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2) \iff E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$$

---

14 *Détermination d'un supplémentaire*

Soit A un polynôme non nul et $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ A \text{ divise } P\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et en déterminer un supplémentaire.

Indication : On pourra penser à utiliser la division euclidienne.

---

15 *Im(f) isomorphe à tout supplémentaire du noyau*

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est isomorphe à tout supplémentaire du noyau.

$\boxed{16}$ *Supplémentaire commun*

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que $F \cup G$ est un espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
2. En déduire que $F \cup G = E$ si et seulement si $F = E$ ou $G = E$.
3. Démontrer alors que $\dim F = \dim G$ si et seulement si F et G ont un supplémentaire commun (on pourra raisonner par récurrence sur $\mathrm{codim} F = n - \dim F$).

$\boxed{17}$ *Décomposition de E comme somme directe de trois sous-espaces vectoriels*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

Pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, on pose $F_k = \mathrm{Ker}(f - j^k \mathrm{Id}_E)$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

Montrer que $E = \bigoplus_{k=0}^{2} F_k$.

En supposant de plus que E est de dimension finie, donner la matrice de f dans une base adaptée à cette décomposition.

$\boxed{18}$ *L'opérateur de différence*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ f(P) = P(X+1) - P(X)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & f(P) \end{array}$$

1. Écrire la matrice de f_3 relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. (a) Soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$. Montrer que $P - P(0)$ admet une infinité de racines.
   (b) En déduire $\mathrm{Ker}(f)$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le noyau et l'image de f_n.
   (b) En déduire que f est surjectif.
4. (a) Trouver tous les polynômes P tels que $P(X+1) - P(X) = X^2$.
   (b) En déduire une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} k^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. On pose $H_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $H_k = \dfrac{1}{k!} X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1)$.
   Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(H_k) = H_{k-1}$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Déterminer la matrice de f_n dans la base $(H_0, \dots, H_n)$.
   (c) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$P = \sum_{k=0}^{n} [f^k(P)](0) H_k.$$

$\boxed{19}$ *Problème des moments*

Soit X une variable aléatoire finie définie sur un espace probabilisé (Ω, P) telle que :

$$X(\Omega) = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \text{ (les } x_i \text{ étant des réels deux à deux distincts).}$$

Soit $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $E(X^k) = m_k$.

Comment peut-on déterminer la loi de X ?

Application : En utilisant cette méthode, déterminer la loi de la variable aléatoire Y qui vérifie :

$$Y(\Omega) = \{0, 1, 2\},\ E(Y) = 1 \text{ et } E(Y^2) = \frac{5}{3}.$$

$\boxed{20}$ *Preuve du déterminant de Vandermonde par les matrices de passage*
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, deux à deux distincts.

On note $V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ le déterminant de Vandermonde de $x_1, \dots, x_n$.

On souhaite prouver par une autre démonstration que celle vue en cours que $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

On considère les trois bases de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ suivantes :

- $\mathscr{B} = \big(1, \dots, X^{n-1}\big)$ la base canonique,
- $\mathscr{B}' = \big(L_1, \dots, L_n\big)$ la base des polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $x_1, \dots, x_n$,
- $\mathscr{B}'' = \big(1, X - x_1, (X - x_1)(X - x_2), \dots, (X - x_1)(X - x_2)\dots(X - x_{n-1})\big)$.

Exprimer la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$ en fonction de celle de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}''$.
Conclure.

$\boxed{21}$ *Matrices semblables*

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ e & d & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Montrer que les matrices A et B sont semblables.
Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

$\boxed{22}$ *Matrices semblables*
Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, les matrices A_a et B_a sont semblables :

$$A_a = \begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix} \text{ et } B_a = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$$

$\boxed{23}$ *Matrices semblables*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$.

Montrer que $A^2 = 0$ si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que A soit semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $2r \leqslant n$.

On pourra commencer par étudier le cas $n = 3$.

$\boxed{24}$ *Deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*
On se propose de démontrer le résultat suivant :
« deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ».
Soit donc A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et un élément P de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$.

1. Montrer qu'il existe R et J éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $P = R + \mathrm{i}J$ avec $\mathrm{i}^2 = -1$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{C}$, $A(R + tJ) = (R + tJ)B$.
3. Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\det(R + t_0 J) \neq 0$.
4. En déduire que A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{25}$ *Trace d'un endomorphisme*
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ défini par : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f(M) = AM$.
Calculer $\mathrm{tr}(f)$ en fonction de $\mathrm{tr}(A)$.

$\boxed{26}$ *Endomorphismes nilpotents*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Un endomorphisme u de E est dit *nilpotent* lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Le plus petit entier p tel que $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ est appelé *indice de nilpotence* de u.
On considère ici un endomorphisme u de E nilpotent et non nul, d'indice de nilpotence p.

1. Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin \operatorname{Ker}(u^{p-1})$.
   Montrer que la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0))$ est libre.
2. En déduire qu'on a $p \leqslant n$, $u^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $\operatorname{rg}(u) \geqslant p-1$.

On suppose désormais que $p = n$.

3. Montrer que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
4. (a) Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $v \circ u = u \circ v$.
   Justifier qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $v(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x_0)$.
   En posant $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$, montrer qu'on a $v = P(u)$.
   (b) En déduire que les seuls endomorphismes de E qui commutent avec u sont les polynômes en u.
5. Déterminer $\operatorname{tr}(u^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{27}$ *Somme directe de sous-espaces vectoriels, égale à E*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $p_1, \ldots, p_m$ des projecteurs de E tels que $\sum_{i=1}^{m} p_i = \mathrm{Id}_E$.

Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im}(p_i)$. *Indication :* On poura utiliser la trace.

$\boxed{28}$ *Matrices de trace nulle*

1. Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
   (a) Montrer que pour tout $x \in E$ non nul, il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.
   (b) Comparer λ_x et λ_y pour x et y deux vecteurs non nuls.
   On pourra considérer les cas : la famille (x, y) est liée et la famille (x, y) est libre.
   (c) En déduire que f est une homothétie.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle.
   Montrer que A est semblable à une matrice n'ayant que des 0 sur la diagonale.
   On pourra raisonner par récurrence sur n.

$\boxed{29}$ *Sous-espaces stables de $\mathbb{R}[X]$ par l'opérateur de dérivation*

On considère l'endomorphisme D de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ défini par $D(P) = P'$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par D et donner la matrice A_n de l'endomorphisme induit par D sur $\mathbb{K}_n[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, de dimension finie non nulle, stable par D.
   (a) Justifier l'existence d'un entier naturel n et d'un polynôme R de degré n tel que $R \in F$ et $F \subset \mathbb{K}_n[X]$
   (b) Montrer que la famille $\left(D^i(R)\right)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille libre de F.
   (c) En déduire que $F = \mathbb{K}_n[X]$.
3. Donner tous les sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par D.

$\boxed{30}$ *Drapeau d'un espace vectoriel*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
On appelle *drapeau de E* toute suite finie $(E_0, E_1, \dots, E_p)$ de sous-espaces vectoriels de E, strictement croissante, commençant par l'espace nul et terminant par E, c'est-à-dire telle que :

$$\{0_E\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{p-1} \subsetneq E_p = E$$

Soit φ un endomorphisme de E.
Montrer qu'il existe un drapeau de E composé de sous-espaces vectoriels tous stables par φ si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de φ est triangulaire par blocs.

$\boxed{31}$ *Nilespace et cœur*
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
On pose :

$$N = \bigcup_{p=0}^{\infty} \operatorname{Ker}(u^p) \quad \text{et} \quad C = \bigcap_{p=0}^{\infty} \operatorname{Im}(u^p)$$

1. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N = \operatorname{Ker}(u^n)$ et $C = \operatorname{Im}(u^n)$.
2. Établir que N et C sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, stables par u et tels que les endomorphismes induits $u_{|N}$ et $u_{|C}$ soient respectivement nilpotent et bijectif.
3. Réciproquement, on suppose $E = F \oplus G$ avec F et G sous-espaces vectoriels stables par u tels que les endomorphismes induits $u_{|F}$ et $u_{|G}$ soient respectivement nilpotent et bijectif.
   Établir $F = N$ et $G = C$.

$\boxed{32}$ *Existence d'un polynôme annulateur non nul en dimension finie*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Justifier l'existence d'un entier naturel p tel que la famille $(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^p)$ soit liée.
En déduire que u possède un polynôme annulateur non nul.

$\boxed{33}$ *Recherche de polynômes annulateurs*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les cœfficients sont égaux à 1.
   Déterminer un polynôme annulateur non nul de J.
2. Déterminer un polynôme annulateur non nul de l'endomorphisme :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} \end{array}.$$

3. Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini sur la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ par :

$$v(e_1) = e_2 \qquad v(e_2) = 0 \qquad v(e_3) = e_3.$$

   Déterminer un polynôme annulateur non nul de v.

$\boxed{34}$ *Polynôme annulateur d'une matrice triangulaire par blocs*
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ (0) & B \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) \text{ et } B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K}).$$

On suppose que P est un polynôme annulateur de A et Q est un polynôme annulateur de B.
Déterminer un polynôme annulateur de M.

$\boxed{35}$ *Calcul de* u^{-1} *et* u^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $P = (X-1)^2$ est un polynôme annulateur de u.

1. Montrer que u est un automorphisme de E et donner une expression de u^{-1} comme combinaison linéaire de Id_E et u.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression de u^n comme combinaison linéaire de Id_E et u.