Chapitre 3

Compléments d'algèbre linéaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I Somme de sous-espaces vectoriels

I. A Somme de deux sous-espaces vectoriels (rappels)

Définition 1.1

Soit F et G des sous-espaces vectoriels de E.

- Somme de F et G :

$$F+G=\{x_F+x_G;\ \text{avec } x_F\in F, x_G\in G\}.$$

- La somme $F+G$ est dite directe lorsque pour tout $x\in F+G$, il existe un unique couple $(x_F,x_G)\in F\times G$ tel que $x=x_F+x_G$. Dans ce cas la somme est notée $F\oplus G$.
- Les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E lorsque :

$$E=F\oplus G.$$

Proposition 1.2

Soit F et G des sous-espaces vectoriels de E.

- $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient F et G.
- La somme $F+G$ est directe si et seulement si ____________.
- F et G sont supplémentaires si et seulement si tout vecteur $x\in E$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x=x_F+x_G$ avec $x_F\in F$ et $x_G\in G$.

Remarque 1.3 : Si on considère l'application $\Phi:\left|\begin{array}{ccc}F\times G&\longrightarrow&E\\(x,y)&\longmapsto&x+y\end{array}\right.$, alors

- Φ est une application linéaire et $\mathrm{Im}(\Phi)=$ ________ ;
- F et G sont en somme directe si et seulement si Φ est ________ ;
- F et G sont supplémentaires si et seulement si Φ est ____________ ____________.

Proposition 1.4 (Formule de Grassmann)

Si F et G sont de dimension finie, alors :

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G).$$

En particulier, $\dim(F+G)\leqslant\dim(F)+\dim(G)$ avec égalité si et seulement si F et G sont en somme directe.

Proposition 1.5

Si E est de dimension finie et F et G des sous-espaces vectoriels de E, alors sont équivalents :

- F et G sont supplémentaires dans E ;
- $F\cap G=\{0\}$ et $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$;
- $F+G=E$ et $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$.

Proposition 1.6

Si E est de dimension finie et F et G des sous-espaces vectoriels de E, les espaces F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si la concaténation d'une base de F et d'une base de G forme une base de E, dite adaptée à la somme directe.

Remarque 1.7 : On peut ainsi construire des sous-espaces vectoriels supplémentaires à partir d'une base de E.

Proposition 1.8

Si E est de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire. Une base adaptée à cette somme directe et également dite adaptée au sous-espace vectoriel F.

I. B Sommes d'une famille de sous-espaces vectoriels

Définition 1.9

Soit $E_1,\dots,E_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

On appelle **somme des $\boldsymbol{E_1,\dots,E_p}$** et on note $\sum\limits_{i=1}^{p}E_i$ l'ensemble des vecteurs de E de la forme $x=\sum\limits_{i=1}^{p}x_i$ avec pour tout $i\in[\![1\,;p]\!]$, $x_i\in E_i$.

Remarque 1.10 : Si F, G et H sont trois sous-espaces de E alors $(F+G)+H=F+G+H=F+(G+H)$.
La somme est associative.

Remarque 1.11 : Considérons l'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^{p} E_i & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} x_i \end{array}$$

Alors Φ est linéaire et $\mathrm{Im}(\Phi) =$ ________.

Proposition 1.12

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E.
La somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les E_i pour $i \in [\![1\,;p]\!]$.

Méthode 1.13 (pour montrer que $\sum E_i \subset G$)

Si $\begin{cases} \forall i \in [\![1\,;p]\!], E_i \subset G; \\ G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E; \end{cases}$

alors : $\sum_{i=1}^{p} E_i \subset G$.

Définition 1.14

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E.
La somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est dite **directe** lorsque pour tout $x \in \sum_{i=1}^{p} E_i$, il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_i$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.
Dans ce cas, la somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est notée $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

Remarque 1.15 : La somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe si et seulement si Φ est injective.

Théorème 1.16

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E.
La somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_i, \quad \sum_{i=1}^{p} x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1\,;p]\!],\, x_i = 0.$$

Proposition 1.17

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E.
La somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe si et seulement si :

$$\begin{cases} \text{la somme } \sum_{i=1}^{p-1} E_i \text{ est directe} \\ \left(\bigoplus_{i=1}^{p-1} E_i \right) \cap E_p = \{0\}\,. \end{cases}$$

Attention : Pour $p \geqslant 3$, il ne suffit pas que les intersections deux à deux des E_i soient réduites à $\{0_E\}$ pour que la somme des E_i soit directe.

Contre exemple 1.18 : Pour $E = \mathbb{R}^2$, $F =$ ________, $G =$ ________ et $H =$ ________, les sous-espaces vectoriels F, G, H sont deux à deux en somme directe, mais la somme $F + G + H$ n'est pas directe.

Définition 1.19

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. On appelle **projecteurs associés** à cette somme directe les p projecteurs sur l'un de ces sous-espaces vectoriels parallèlement à la somme (directe) des autres.

Théorème 1.20

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, $\varphi_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$, alors il existe une unique application $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\varphi_{|E_i} = \varphi_i$ pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$.

Autrement dit : si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$, on peut définir une application linéaire de E dans F en la définissant sur chacun des E_i.

I. C En dimension finie

Proposition 1.21

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E.
Si E est de dimension finie, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ si et seulement si la concaténation d'une base de chacun des E_i pour $i \in [\![1\,;p]\!]$ forme une base de E.
Une telle base est appelée **adaptée à la décomposition en somme directe $\boldsymbol{E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i}$**.

Remarque 1.22 : On peut ainsi former une décomposition en somme directe à partir d'une base de E.

Théorème 1.23

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E.
Si $E_1, \dots, E_p$ sont de dimension finie, alors :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

II Matrices définies par blocs

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Soit $(p_1, p_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $p_1 + p_2 = p$ et $(q_1, q_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $q_1 + q_2 = q$.
On définit quatre sous-matrices de A : $A_{1,1} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p_1 \\ 1 \leqslant j \leqslant q_1}} \in \mathcal{M}_{p_1,q_1}(\mathbb{K})$,
$A_{1,2} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p_1 \\ q_1+1 \leqslant j \leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p_1,q_2}(\mathbb{K})$, $A_{2,1} = (a_{i,j})_{\substack{p_1+1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q_1}} \in \mathcal{M}_{p_2,q_1}(\mathbb{K})$ et
$A_{2,2} = (a_{i,j})_{\substack{p_1+1 \leqslant i \leqslant p \\ q_1+1 \leqslant j \leqslant q_2}} \in \mathcal{M}_{p_2,q_2}(\mathbb{K})$.
On peut alors écrire $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array}\right)$ et on dit que la matrice A est définie **par blocs**.

Exemple 2.1 : Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$. Alors

$$M = \qquad\qquad$$

Interprétation : Soit A la matrice d'une application linéaire u d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F relativement à des bases $\mathcal{B}$ pour E et $\mathcal{B}'$ pour F. En séparant la famille $\mathcal{B}$ en deux familles $\mathcal{B}_1$ des p_1 premiers vecteurs et $\mathcal{B}_2$ des autres vecteurs de B, on obtient les bases de deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 supplémentaires dans E. De même pour $F = E_1 \oplus E_2$ et π_1, π_2 les projecteurs associés. Alors $A_{i,j}$ est la matrice de $\pi_i \circ u|_{E_j}$ dans les bases $\mathcal{B}_j$ et $\mathcal{B}'_i$.

Proposition 2.2

Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On suppose que A et B sont définies par blocs selon le même découpage ($p = p_1 + p_2$, $q = q_1 + q_2$) :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array}\right) \text{ et } B = \left(\begin{array}{c|c} B_{1,1} & B_{1,2} \\ \hline B_{2,1} & B_{2,2} \end{array}\right).$$

Alors :

$$A + B = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} + B_{1,1} & A_{1,2} + B_{1,2} \\ \hline A_{2,1} + B_{2,1} & A_{2,2} + B_{2,2} \end{array}\right)$$

et :

$$\lambda A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda A_{1,1} & \lambda A_{1,2} \\ \hline \lambda A_{2,1} & \lambda A_{2,2} \end{array}\right)$$

Proposition 2.3

Soit $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ définie par blocs, alors :

$$A^\top = \left(\begin{array}{c|c} {A_{1,1}}^\top & {A_{2,1}}^\top \\ \hline {A_{1,2}}^\top & {A_{2,2}}^\top \end{array}\right)$$

Proposition 2.4

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.
On suppose que A et B sont définies par blocs et que le découpage en colonnes de A est le même que le découpage en lignes de B ($q = q_1 + q_2$).
Alors

$$\begin{aligned} A \times B &= \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} B_{1,1} & B_{1,2} \\ \hline B_{2,1} & B_{2,2} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \\ \hline A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} \end{array}\right). \end{aligned}$$

Exemple 2.5 : Déterminer une matrice N définie par bloc telle le produit $M \times N$ puisse être calculé par blocs.

Attention : On peut faire les calculs sur les matrices par blocs de la même manière que si c'était des matrices dont les coefficients sont eux-même des matrices. Mais la multiplication entre deux blocs n'est pas commutative.

On peut généraliser ceci à un nombre quelconque de blocs :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,m} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,m} \\ \hline \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hline A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,m} \end{array}\right)$$

Pour le produit AB, le découpage selon les colonnes de A doit être le même que le découpage selon les lignes de B.

Remarque 2.6 : On généralise également les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes (échange, multiplication par un scalaire, transvection). En particulier une transvection ($L_i \leftarrow L_i + aL_j$) sur des blocs de p_i lignes correspond à p_i transvections sur les lignes de la matrice. Elle laisse donc le déterminant invariant.

Lorsque $n = m$, on appelle matrice **triangulaire (supérieure) par blocs** toute matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ \hline 0 & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{array}\right)$$

et matrice **diagonale par blocs** toute matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & A_{2,2} & \cdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{array}\right).$$

Théorème 2.7

Si $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \hline 0 & \cdots & 0 & A_p \end{array}\right)$ est une matrice triangulaire par blocs telle que pour tout $k \in [\![1\,;p]\!]$, A_k est une matrice carrée, alors : $\det(A) = \prod_{k=1}^{p} \det(A_k)$.

III Sous-espaces stables

Définition 3.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et φ un endomorphisme de E.

- On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est **stable par φ** lorsque : $\varphi(F) \subset F$, i.e. : ……………………………… .
- L'application $\tilde{\varphi} : \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & \varphi(u) \end{array}\right.$ est alors un endomorphisme de F appelé **endomorphisme induit par φ sur F**.

Exemples 3.2 :

- Quelque soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, E et $\{0_E\}$ sont stables par φ.
- Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et φ l'application de dérivation (linéaire sur E). Déterminer des sous-espaces vectoriels non triviaux stables par φ.

Proposition 3.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u et v deux endomorphismes de E qui commutent c'est-à-dire tels que $u \circ v = v \circ u$.
Alors les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont stables par u.

Remarque 3.4 : En particulier $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u.

Proposition 3.5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

- F est stable par φ
- la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire par blocs : $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Dans ce cas, A est la matrice de l'endomorphisme induit par φ sur F dans la base $(e_1, \dots, e_p)$.

Théorème 3.6

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à cette décomposition.
Sont équivalents :

- $E_1, \dots, E_p$ sont stables par φ
- la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs :
$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & A_2 & \cdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & A_p \end{array}\right)$ où pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $A_i \in \mathcal{M}_{\dim E_i}(\mathbb{K})$.

Dans ce cas, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, A_i est la matrice de $\varphi_{|E_i}$ dans la base $\mathcal{B}_i$.

Remarque 3.7 : Donner un condition nécessaire et suffisante pour que la matrice de φ dans un certaine base soit de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \\ \hline 0 & A_{2,2} & \cdots & A_{2,p} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & A_{p,p} \end{array}\right)$$

Proposition 3.8 (droite stable)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Une droite vectorielle D est stable par u si et seulement si il existe un scalaire λ tel que pour tout $x \in D, u(x) = \lambda x$.

IV Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

IV. A Polynômes d'un endomorphisme

Définition 4.1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on note :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k \in \underline{\qquad\qquad}.$$

Remarque 4.2 : Le polynôme d'endomorphisme $P(u)$ est ______________________________

______________________________.

Attention :
- $PQ(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$ et pas $P\big(Q(u)\big)$;
- pour $x \in E$, l'écriture $P(u)(x)$ a un sens car $P(u) \in \mathcal{L}(E)$; mais l'écriture $P(u(x))$ n'a pas de sens : $u(x) \in E$.

Théorème 4.3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$. Son image, notée $\mathbb{K}[u]$, est une sous algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

IV. B Idéal annulateur

Définition 4.4

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le noyau de du morphisme d'algèbre $P \mapsto P(u)$ est l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u) = 0$, c'est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appelé **idéal annulateur** de u. Les polynômes de cet idéal annulateur sont appelés **polynômes annulateurs** de u.

Exemples 4.5 :
- Déterminer l'idéal annulateur d'un projecteur.
- Soit $D \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ définie par $D(f) = f'$. Montrer que le polynôme nul est le seul polynôme annulateur de D.

IV. C En dimension finie

Définition/Proposition 4.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors l'idéal annulateur de u est non nul et il existe un unique polynôme unitaire générateur de l'idéal annulateur de u, appelé **polynôme minimal** de u et noté μ_u ou π_u.

Remarques 4.7 : • Tout polynôme annulateur de u est un multiple du polynôme minimal de u : μ_u ;
- μ_u est le seul polynôme annulateur unitaire de degré minimal ;
- $\mu_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$;
- $\deg(\mu_u) \geqslant 1$.

Définition 4.8

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on note :

$$P(M) = \sum_{k=0}^{p} a_k M^k \in \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

L'application $P \mapsto P(M)$ est un morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Son image, notée $\mathbb{K}[M]$, est une sous algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Son noyau est l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(M) = 0$, c'est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appelé **idéal annulateur** de M. Les polynômes de cet idéal annulateur sont appelés **polynômes annulateurs** de M et on appelle **polynôme minimal** de M, et on note μ_M (ou π_M) l'unique polynôme unitaire générateur de l'idéal annulateur de M.

Exemple 4.9 : Polynôme minimal annulateur de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Rappel : Si $\mathcal{B}$ est une base de E de dimension n, alors : $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 4.10

Soit $\mathcal{B}$ est une base de E de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors :
- $\forall P \in \mathbb{K}[X], \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(P(u)\big) = P(A)$;
- les polynômes annulateurs de u sont les polynômes annulateurs de A ;
- $\mu_u = \mu_A$.

Corollaire 4.11

Deux matrices semblables ont le même polynôme minimal.

Théorème 4.12

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et d le degré du polynôme minimal de u.
Alors la famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

IV. D Application : calcul des puissances d'une matrice

Méthode 4.13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et μ_A son polynôme minimal. On effectue la division euclidienne de X^k par μ_A : $X^k = \mu_A \times Q + R$ et on évalue en A : $A^k = R(A)$.

Exemple 4.14 : Polynôme minimal et puissances de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 4.15 : On peut également calculer les puissances de cette matrice à l'aide de ________________.

IV. E Exemple fondamental : matrice compagnon (HP)

Le résultat suivant n'est pas au programme, mais c'est un exercice classique.

Proposition 4.16

Tout polynôme unitaire $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ est le polynôme minimal d'au moins une matrice, sa matrice compagnon :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

IV. F Lemme de décomposition des noyaux

Théorème 4.17 (Lemme de décomposition des noyaux)

Soit $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux, $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors :

$$\mathrm{Ker}\,\big(P(u)\big) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\,\big(P_i(u)\big).$$