TD 1d / Séries numériques : corrigés

Entraînement

► 7 Avec des paramètres

Soit a et b deux constantes réelles.
Déterminer la nature de la série :

$$\sum_{n\geqslant 1}\big(\ln(n)+a\,\ln(n+1)+b\,\ln(n+2)\big).$$

Calculer sa somme en cas de convergence.

► Corrigé

On cherche un développement asymptotique du terme général ; pour tout entier $n\geqslant 1$:

$$\begin{aligned}u_n &:= \ln(n)+a\,\ln(n+1)+b\,\ln(n+2)\\ &=\ln(n)+a\,\ln\left(n\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\right)+b\,\ln\left(n\left(1+\tfrac{2}{n}\right)\right)\\ &=\ln(n)+a\left[\ln(n)+\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\right]+b\left[\ln(n)+\ln\left(1+\tfrac{2}{n}\right)\right]\\ &=(1+a+b)\,\ln(n)+a\,\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right)+b\,\ln\left(1+\tfrac{2}{n}\right)\\ &=(1+a+b)\,\ln(n)+a\left(\tfrac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right)+b\left(\tfrac{2}{n}+\mathrm{O}\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right)\\ &=(1+a+b)\,\ln(n)+(a+2b)\cdot\tfrac{1}{n}+\underset{n\to\infty}{\mathrm{O}}\left(\tfrac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

On raisonne par **analyse-synthèse :**

- **Analyse.** Supposons que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
  Nécessairement, son terme général u_n tend vers 0.
  On en déduit que $1+a+b=0$, donc $b=-a-1$, et donc :
  $$u_n=(-a-2)\cdot\tfrac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\tfrac{1}{n^2}\right).$$
  Si $a\neq -2$, alors $u_n\sim-\frac{a+2}{n}$, et $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ diverge par théorème de comparaison (...).
  Ceci contredit notre hypothèse de convergence ;
  donc $\boldsymbol{a=-2}$ **et** $\boldsymbol{b=-a-1=1}$.
  Le seul cas où la série peut converger est le cas $\boldsymbol{(a,b)=(-2,1)}$.
- **Synthèse.** Supposons que $(a,b)=(-2,1)$. Nous allons constater que la série $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge et calculer sa somme en étudiant ses sommes partielles :
  $$\begin{aligned}\forall\, n\geqslant 1,\quad S_n &:= \sum_{k=1}^{n}\big(\ln(n)-2\,\ln(n+1)+\ln(n+2)\big)\\ &=\sum_{k=1}^{n}\big(\ln(k)-\ln(k+1)\big)\\ &\quad-\sum_{k=1}^{n}\big(\ln(k+1)-\ln(k+2)\big).\end{aligned}$$
  Les termes se télescopent :
  $$\begin{aligned}S_n&=\big(\ln(1)-\ln(n+1)\big)-\big(\ln(2)-\ln(n+2)\big)\\ &=-\ln(2)-\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right).\end{aligned}$$
  Comme $\frac{n+1}{n+2}\sim\frac{n}{n}=1$, on obtient $S_n\xrightarrow[n\to\infty]{}-\ln(2)$, qui est une limite finie.
  La série $\boldsymbol{\sum_{n\geqslant 1}u_n}$ converge et sa somme vaut $\boldsymbol{-\ln(2)}$.

Conclusion. La série $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge *si et seulement si* $(a,b)=(-2,1)$. On a dans ce cas :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big(\ln(n)-2\,\ln(n+1)+\ln(n+2)\big)=-\ln(2).$$

► 8 Pas de précipitation !

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-8)^n}{(2n)!}$ est un nombre réel strictement négatif.

► Corrigé

Posons : $\quad\forall\, n\geqslant 0,\ u_n:=\dfrac{(-8)^n}{(2n)!}=(-1)^n\,\dfrac{8^n}{(2n)!}.$

Il s'agit d'une **suite alternée,** vérifiant en outre :

$$\boldsymbol{|\,u_n\,|=\frac{8^n}{(2n)!}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{cc}}0.}$$

Étudions la **monotonie** de la suite $\big(|\,u_n\,|\big)_{n\geqslant 0}$.
Comme tous ses termes sont strictement positifs, on peut étudier le rapport de deux termes consécutifs :

$$\begin{aligned}\forall\, n\geqslant 0,\quad \frac{|\,u_{n+1}\,|}{|\,u_n\,|}\leqslant 1 &\iff \frac{8}{(2n+1)(2n+2)}\leqslant 1\\ &\iff (2n+1)(2n+2)\geqslant 8.\end{aligned}$$

Remarquons que la suite $(v_n):=\big((2n+1)(2n+2)\big)_{n\geqslant 0}$ est croissante ; ses premiers termes valent $v_0=2<8$ et $v_1=12\geqslant 8$. Ainsi, **la suite $\boldsymbol{\big(|\,u_n\,|\big)_{n\geqslant 0}}$ est décroissante à partir du rang 1.**
Le CSSA s'applique à la série $\sum_{n\geqslant 0}u_n$, **mais seulement à partir du rang 1.**

- Par le CSSA, la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ est comprise entre 0 et $u_1=-4$:
  $$-4\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}u_n\leqslant 0\quad\text{donc}\quad -3\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}u_n\leqslant 1,$$
  en ajoutant $u_0=1$. *Ce raisonnement n'est pas assez précis pour obtenir le signe de S.*
- Le reste $R_1=\sum_{n=2}^{\infty}u_n$ de la série $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ est compris entre 0 et :
  $$u_2=\frac{8^2}{4!}=\frac{2^6}{2\times 3\times 2^2}=\frac{2^3}{3}=\frac{8}{3}\ :$$
  $$\text{ainsi,}\quad 0\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}u_n\leqslant\frac{8}{3}.$$
  On ajoute $u_0+u_1=1-4=-3$ et on obtient :
  $$-3\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}u_n\leqslant-\frac{1}{3}<0.$$

Conclusion : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-8)^n}{(2n)!} < 0.$

Remarque. Nous verrons dans le chapitre *Séries entières* que cette somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-8)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{8}\right)^{2n}}{(2n)!} = \cos\left(\sqrt{8}\right).$$

En remarquant que $\frac{\pi}{2} < \sqrt{8} < \pi$, on trouve que $\cos(\sqrt{8}) < 0$, ce qui est cohérent avec notre résultat.

► 9 Utilisation de développement asymptotique

Soit α une constante strictement positive.

1) Écrire un développement asymptotique à deux termes de $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

2) Déterminer, en discutant suivant la valeur de α, la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

► Corrigé

1) Puisque $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$ et que $\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (on utilise ici que $\alpha > 0$) :

$$\begin{aligned}\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).\end{aligned}$$

2) Pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n := \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$, on pose $a_n := \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $b_n := -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$ dans le développement précédent, de sorte que $u_n = a_n + b_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

- La série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ est convergente car elle vérifie les 3 hypothèses du CSSA (...) ;
- Quant à $\sum_{n\geqslant 1} b_n$, on remarque que $b_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$ et que $-\frac{1}{2n^{2\alpha}} \leqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Par théorème de comparaison, $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ est de même nature que $\sum_{n\geqslant 1} -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$, donc que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{2\alpha}}$:

$$\sum_{n\geqslant 1} b_n \text{ converge} \iff 2\alpha > 1 \iff \alpha > 1/2.$$

On peut maintenant conclure en distinguant deux cas :

↪ **Si $\alpha > 1/2$:** alors $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge en tant que somme de deux séries convergentes, par linéarité de la sommation.

↪ **Si $\alpha \leqslant 1/2$:** $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est somme de $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, convergente, et de $\sum_{n\geqslant 1} b_n$, divergente. On en déduit que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge : par l'absurde, si elle convergeait, alors $\sum_{n\geqslant 1} b_n = \sum_{n\geqslant 1} u_n - \sum_{n\geqslant 1} a_n$ convergerait aussi par linéarité de la sommation.

Conclusion. $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^{2\alpha}}\right)$ converge *si et seulement si* $\alpha > 1/2$.