DEVOIR MAISON 1 - *Sur les polynômes*

Corrigé

Exercice 1 - Étude d'une forme linéaire - *Source : E3A MP 2021*

1. Notons $P_0 = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P_k = X^{k-1}(X-1)$.
On a pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k \leqslant n$.
Ainsi, la famille $\mathscr{B} = (P_0, \ldots, P_n)$ est une famille de $\mathbb{R}_n[X]$, libre car constituée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts.
De plus, $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$.
On en déduit que :

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

2.(a) L'application φ est définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ (pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, P est une fonction continue sur le segment $[0,1]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$ est bien définie).
Soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_n[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\varphi(\lambda P_1 + P_2) = \int_0^1 (\lambda P_1 + P_2)(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (\lambda P_1(t) + P_2(t))\mathrm{d}t = \lambda \int_0^1 P_1(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 P_2(t)\mathrm{d}t = \lambda\varphi(P_1) + \varphi(P_2)$$

par linéarité de l'intégrale.
L'application φ est donc bien linéaire.
Ainsi :

$$\boxed{\varphi \text{ est une forme linéaire sur } \mathbb{R}_n[X].}$$

2.(b) Comme $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$, on sait que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est de dimension 1, $\mathrm{Im}(\varphi)$ est de dimension 0 ou 1.
On a de plus $\varphi(1) = \displaystyle\int_0^1 1\mathrm{d}t = 1 \neq 0$ donc φ n'est pas l'application nulle donc $\mathrm{rg}(\varphi) \neq 0$ d'où $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$.
On a donc $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$ avec $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 1 = \dim(\mathbb{R})$ d'où :

$$\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}.}$$

Par le théorème du rang, on a :

$$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathbb{R}_n[X])$$

donc

$$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \mathrm{rg}(\varphi) = n + 1 - 1 = n.$$

Donc :

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n \text{ (et } \mathrm{Ker}(\varphi) \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}_n[X]).}$$

3.(a) Par l'énoncé, ψ est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
Soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_n[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\big(\psi(\lambda P_1 + P_2)\big)(x) &= \int_0^x (\lambda P_1 + P_2)(t)\mathrm{d}t = \int_0^x (\lambda P_1(t) + P_2(t))\mathrm{d}t = \lambda \int_0^x P_1(t)\mathrm{d}t + \int_0^x P_2(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda\big(\psi(P_1)\big)(x) + \big(\psi(P_2)\big)(x) = \big(\lambda\psi(P_1) + \psi(P_2)\big)(x)\end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale.
On en déduit que $\psi(\lambda P_1 + P_2) = \lambda\psi(P_1) + \psi(P_2)$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{l'application } \psi \text{ est linéaire.}}$$

3.(b) Comme $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (c'est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$), on a :

$$\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(\psi(1), \psi(X), \ldots, \psi(X^n)).$$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big(\psi(X^k)\big)(x) = \int_0^x t^k \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{k+1} t^{k+1}\right]_0^x = \frac{1}{k+1} x^{k+1}.$$

On en déduit que $\psi(X^k) = \dfrac{1}{k+1} X^{k+1}$.
Ainsi :

$$\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, \frac{1}{2} X^2, \ldots, \frac{1}{n+1} X^{n+1}).$$

On en déduit (par propriété de Vect) que :

$$\boxed{\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, X^2, \ldots, X^{n+1}).}$$

3.(c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a par définition, $\big(\psi(P)\big)(1) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = \varphi(P)$.
On a ainsi les équivalences suivantes :

$$P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(P) = 0 \Leftrightarrow \big(\psi(P)\big)(1) = 0 \Leftrightarrow 1 \text{ est une racine de } \psi(P) \Leftrightarrow X - 1 \text{ divise } \psi(P).$$

Montrons maintenant l'équivalence demandée par double implication.
$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $\psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), \ldots, X^n(X-1))$.
Ainsi, il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\psi(P) = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k X^k (X-1) = (X-1) \sum_{k=1}^n a_k X_k$ donc $X - 1 \,|\, \psi(P)$.
Par ce qui précède, on en déduit que $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Donc par ce qui précède, $X - 1 \,|\, \psi(P)$.
Par ailleurs, on a $\big(\psi(P)\big)(0) = 0$ (par définition de ψ) donc 0 est une racine de $\psi(P)$ donc $X \,|\, \psi(P)$.
On en déduit que $X(X-1) \,|\, \psi(P)$.
D'après la question 3.(b), on a $\mathrm{Im}(\psi) \subset \mathbb{R}_{n+1}[X]$ donc $\psi(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$.
On en déduit qu'il existe $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\psi(P) = X(X-1)R$ donc il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\psi(P) = X(X-1) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^{k+1}(X-1)$.
Ainsi, $\psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), \ldots, X^n(X-1))$.
On a donc prouvé l'équivalence :

$$\boxed{P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), \ldots, X^n(X-1)).}$$

3.(d) Soit $P \in \mathrm{Ker}(\psi)$.
Par la question précédente, il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\psi(P) = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k X^k (X-1)$.
On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^x P(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n a_k x^k (x-1).$$

En dérivant, on obtient alors par le théorème fondamental de l'intégration que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = \sum_{k=1}^n a_k (k x^{k-1}(x-1) + x^k) = \sum_{k=1}^n a_k ((k+1)x^k - k x^{k-1}).$$

On en déduit que $P \in \mathrm{Vect}((k+1)X^k - kX^{k-1},\ 1 \leqslant k \leqslant n)$.
Posons pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $R_k = (k+1)X^k - kX^{k-1}$.

On a donc prouvé l'inclusion $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}(R_1, \dots, R_n)$.
Or, la famille $(R_1, \dots, R_n)$ est libre car constituée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts (pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\deg(R_k) = k$).
On en déduit que $\dim(\mathrm{Vect}(R_1, \dots, R_n)) = \mathrm{Card}(R_1, \dots, R_n) = n = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi))$ d'après 2.(b).
On en déduit que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(R_1, \dots, R_n)$ et la famille $(R_1, \dots, R_n)$ étant une famille libre et génératrice de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, on en déduit que :

$$\boxed{(R_1, \dots, R_n), \text{ où pour tout } k \in [\![1, n]\!],\ R_k = (k+1)X^k - kX^{k-1}, \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(\varphi).}$$

4.(a) On sait que $\dim(\mathscr{H}) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) \times \dim(\mathbb{R}) = (n+1) \times 1 = n+1$.

$$\boxed{\mathscr{H} \text{ est un espace vectoriel de dimension } n+1.}$$

4.(b) La famille $(\psi_0, \dots, \psi_n)$ est une famille de $\mathscr{H}$ de cardinal $n+1 = \dim(\mathscr{H})$.
Il suffit donc de montrer que cette famille est libre pour prouver que c'est une base de $\mathscr{H}$.
Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \psi_k = 0_{\mathscr{H}}$ c'est-à-dire pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \psi_k(P) = 0$ ou encore pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{P^{(k)}(0)}{k!} = 0 \ (*).$$

Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Posons $P = X^j$.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$P^{(k)} = \begin{cases} j(j-1)...(j-k+1)X^{j-k} = \dfrac{j!}{(j-k)!}X^{j-k} & \text{si } k \leqslant j \\ 0 & \text{si } k > j \end{cases}$$

donc

$$P^{(k)}(0) = \begin{cases} \dfrac{j!}{(j-k)!}0^{j-k} = 0 & \text{si } k < j \\ j! & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k > j \end{cases} \quad \text{donc } \frac{P^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ 1 & \text{si } k = j \end{cases} = \delta_{k,j}.$$

On en déduit que $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} = \lambda_j$ d'où avec $(*)$, $\lambda_j = 0$.
Ainsi, la famille $(\psi_0, \dots, \psi_n)$ est libre donc :

$$\boxed{(\psi_0, \dots, \psi_n) \text{ est une base de } \mathscr{H}.}$$

4.(c) Comme $\varphi \in \mathscr{H}$, il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\varphi = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \psi_k$ c'est-à-dire pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.
Soit $j \in [\![0, n]\!]$. En posant $P = X^j$, on a vu que $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} = \lambda_j$ donc $\lambda_j = \varphi(X^j)$.
On a :

$$\varphi(X^j) = \int_0^1 t^j \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{j+1}t^{j+1}\right]_0^1 = \frac{1}{j+1} \text{ d'où } \lambda_j = \frac{1}{j+1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\varphi = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\psi_k.}$$

Exercice 2 - Une suite d'Appell - *Source : Centrale TSI 2024*

A.1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
On sait que les polynômes P et $P(X+1)$ appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$ (puisque $\deg(P(X+1)) = \deg(P) \leqslant n$) donc par combinaison linéaire, $\varphi_n(P) = 2P(X) - P(X+1)$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ (puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel).
Ainsi, φ_n est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. Montrons maintenant que φ_n est linéaire.
Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{aligned}\varphi_n(\lambda P + Q) &= 2(\lambda P + Q)(X) - (\lambda P + Q)(X+1) = 2(\lambda P(X) + Q(X)) - (\lambda P(X+1) + Q(X+1)) \\ &= 2\lambda P(X) + 2Q(X) - \lambda P(X+1) - Q(X+1) = \lambda(2P(X) - P(X+1)) + 2Q(X) - Q(X+1) \\ &= \lambda\varphi_n(P) + \varphi_n(Q).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\varphi_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

A.2. Montrons que $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$.
Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi_n)$. On a $\varphi_n(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc $2P(X) = P(X+1)$.
Raisonnons pas l'absurde. Si P n'est pas le polynôme nul, en notant d son degré et a_d son cœfficient dominant, on obtient $2a_d = a_d$ (en regardant les cœfficients en X^d dans l'égalité précédente) d'où $a_d = 0$, ce qui est absurde. On a donc nécessairement $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.
On en déduit que :

$$\boxed{\varphi_n \text{ est injectif.}}$$

A.3. Comme φ_n est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension finie, φ_n est bijectif.
Par conséquent, tout élément Q de $\mathbb{R}_n[X]$ admet un unique antécédent par φ_n dans $\mathbb{R}_n[X]$, ce qui est en particulier vrai pour $Q = X^n$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe un unique polynôme } P \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } \varphi_n(P) = X^n \text{ c'est-à-dire } 2P(X) - P(X+1) = X^n.}$$

B.1. Pour $n = 0$, P_0 est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_0[X]$ vérifiant $2P_0(X) - P_0(X+1) = 1$. Il est clair que le polynôme constant égal à 1 vérifie ces conditions donc $P_0 = 1$ (par unicité) donc $\deg(P_0) = \deg(1) = 0$.
Considérons maintenant le cas où $n \in \mathbb{N}^*$.
On sait que $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\deg(P_n) \leqslant n-1$.
Par combinaison linéaire de deux élements de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $2P_n(X) - P_n(X+1) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ce qui est absurde puisque $2P_n(X) - P_n(X+1) = X^n$.
Ainsi :

$$\boxed{\deg(P_n) = n.}$$

B.2. On a $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{k^{2+n}}{2^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^{2+n}}{e^{k\ln 2}} = 0$ par croissances comparées (car $\ln 2 > 0$) donc $\displaystyle\frac{k^n}{2^k} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$.
On a de plus pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{k^2} \geqslant 0$ et la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$).
Par comparaison, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{k\geqslant 0} \frac{k^n}{2^k} \text{ converge.}}$$

B.3. Par définition de P_n, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2P_n(x) - P_n(x+1) = x^n$ donc en particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k^n = 2P_n(k) - P_n(k+1)$ donc en divisant par 2^k, on obtient :

$$\boxed{\frac{k^n}{2^k} = \frac{P_n(k)}{2^{k-1}} - \frac{P_n(k+1)}{2^k}.}$$

On sait que la série $\sum_{k\geqslant 0}\dfrac{k^n}{2^k}$ converge (question B.2) donc on obtient par somme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{2^k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{P_n(k)}{2^{k-1}}-\frac{P_n(k+1)}{2^k}\right)=\frac{P_n(0)}{2^{-1}}-\lim_{k\to+\infty}\frac{P_n(k+1)}{2^k}\text{ (série télescopique convergente).}$$

Comme pour tout $d\in\mathbb{N}$, $\dfrac{(k+1)^d}{2^k}\underset{k\to+\infty}{\sim}\dfrac{k^d}{2^k}\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}0$ par croissances comparées, on en déduit par combinaison linéaire que $\lim_{k\to+\infty}\dfrac{P_n(k+1)}{2^k}=0$.
L'égalité ci-dessus donne donc $2F_n=2P_n(0)$ d'où :

$$\boxed{P_n(0)=F_n.}$$

B.4. Par définition de P_{n+1}, on a $2P_{n+1}(X)-P_{n+1}(X+1)=X^{n+1}$.
En dérivant, on obtient $2P'_{n+1}(X)-1\times P'_{n+1}(X+1)=(n+1)X^n$ d'où en divisant par $n+1$:

$$2\frac{P'_{n+1}}{n+1}(X)-\frac{P'_{n+1}}{n+1}(X+1)=X^n.$$

De plus, $P_{n+1}\in\mathbb{R}_{n+1}[X]$ donc $\dfrac{P'_{n+1}}{n+1}\in\mathbb{R}_n[X]$.
Par unicité dans la définition de P_n, on en déduit que $\dfrac{P'_{n+1}}{n+1}=P_n$ d'où :

$$\boxed{P'_{n+1}=(n+1)P_n.}$$

B.5. Commençons par prouver par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\ P_n^{(k)}=\frac{n!}{(n-k)!}P_{n-k}.$$

Initialisation : La propriété est vraie au rang $n=0$ puisque dans ce cas, on a aussi $k=0$ et les deux membres de l'égalité donnent P_0.
Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $P_n^{(k)}=\dfrac{n!}{(n-k)!}P_{n-k}$.
Soit $k\in[\![1,n+1]\!]$. En dérivant $k-1$ fois l'égalité $P'_{n+1}=(n+1)P_n$, on obtient :

$$P_{n+1}^{(k)}=(n+1)P_n^{(k-1)}=(n+1)\frac{n!}{(n-(k-1))!}P_{n-(k-1)}$$

par hypothèse de récurrence puisque $k-1\in[\![0,n]\!]$.
On en déduit l'égalité souhaitée :

$$P_{n+1}^{(k)}=\frac{(n+1)!}{((n+1)-k)!}P_{(n+1)-k}.$$

Reste à remarquer que l'égalité est bien vraie dans le cas où $k=0$, les deux membres donnant P_{n+1}.
On a donc bien obtenu le résultat annoncé par récurrence.

En appliquant la formule de Taylor au polynôme $P_n\in\mathbb{R}_n[X]$, on obtient :

$$P_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}X^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}P_{n-k}(0)X^k$$

par ce qui précède. En utilisant la question B.3., on en déduit que :

$$\boxed{P_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{n-k}X^k.}$$

Exercice 3 - Polynômes scindés sur $\mathbb{R}$ - *Source : Mines PC 2021*

1. Les racines complexes du polynômes $X^3 - 1$ sont les racines cubiques de l'unité : 1, $j = e^{2i\pi/3}$ et j^2.
Le polynôme $X^3 - 1$ admet donc une racine complexe non réelle (j par exemple).
Ainsi :

$$\boxed{\text{le polynôme } X^3 - 1 \text{ n'est pas scindé sur } \mathbb{R}.}$$

On a $X^3 - 2X^2 + X = X(X^2 - 2X + 1) = X(X-1)^2$.
Le polynôme $X^3 - 2X^2 + X$ peut donc s'écrire comme un produit de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré 1 (à savoir X, $X-1$ et $X-1$) donc il est scindé sur $\mathbb{R}$.
On peut aussi le justifier en précisant qu'il admet 0 pour racine de multiplicité 1 et 1 pour racine de multiplicité 2 donc ce polynôme de degré 3 admet 3 racines réelles comptées avec leurs multiplicités.
Ainsi :

$$\boxed{\text{le polynôme } X^3 - 2X^2 + X \text{ est scindé sur } \mathbb{R}.}$$

2.(a) Comme P est un polynôme de degré n, il peut s'écrire :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{où} \quad (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ avec } a_n \neq 0.$$

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$Q(x) = x^n P(1/x) = x^n \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = \sum_{\ell=0}^{n} a_{n-\ell} x^\ell$$

en effectuant le changement d'indice $\ell = n - k$.
En prolongeant la fonction Q par continuité en 0 (c'est-à-dire en posant naturellement $Q(0) = a_n$), on obtient que $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k = a_n + a_{n-1}X + \cdots + a_1 X^{n-1} + a_0 X^n$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n.
Son degré d est défini par :

$$d = \max\{k \in [\![0, n]\!],\ a_{n-k} \neq 0\} = n - \min\{\ell \in [\![0, n]\!],\ a_\ell \neq 0\}.$$

D'où en notant $v = \min\{\ell \in [\![0, n]\!],\ a_\ell \neq 0\}$ (v est appelé *la valuation de* P), on a $d = n - v$ et le cœfficient dominant de Q est $a_{n-d} = a_v$.
Ainsi :

$$\boxed{Q \text{ est un polynôme de } \mathbb{R}[X], \text{ de degré } n - v \text{ et de cœfficient dominant } a_v \text{ où } v \text{ est la valuation de } P.}$$

2.(b) On suppose que P est scindé sur $\mathbb{R}$.
Soit z une racine complexe du polynôme Q.
On a nécessairement $z \neq 0$ (car $Q(0) = a_n \neq 0$) et donc $Q(z) = z^n P(1/z)$.
Comme $z^n P(1/z) = 0$ avec $z \neq 0$, on a $P(1/z) = 0$ donc $1/z$ est une racine du polynôme P.
Comme P est scindé sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $1/z$ est un réel x (non nul) donc $z = 1/x$ est un réel également.
Toutes les racines complexes du polynôme Q étant réelles, on en déduit que Q est scindé sur $\mathbb{R}$.
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{si } P \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \text{ alors } Q \text{ est scindé sur } \mathbb{R}.}$$

3. On suppose que P admet au moins $n-1$ racines réelles (non nécessairement distinctes) que l'on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$.
Alors le polynôme P se factorise par $\prod_{k=1}^{n-1}(X - \alpha_k)$ c'est-à-dire qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = \prod_{k=1}^{n-1}(X - \alpha_k)Q$.

Comme P est de degré n et $\prod_{k=1}^{n-1}(X-\alpha_k)$ est de degré $n-1$, le polynôme Q est nécessairement de degré 1.
Ainsi, P s'écrit comme un produit de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré 1 donc il est scindé sur $\mathbb{R}$.
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{si } P \text{ admet au moins } n-1 \text{ racines réelles (non nécessairement distinctes) alors } P \text{ est scindé sur } \mathbb{R}.}$$

4.(a) *Théorème de Rolle :*
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ et à valeurs réelles.
On suppose que f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et qu'elle vérifie $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

4.(b) On suppose que P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.
Ainsi, P admet n racines distinctes que l'on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en supposant $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$.
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comme P est une fonction dérivable sur $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ vérifiant $P(\alpha_k) = 0 = P(\alpha_{k+1})$, on en déduit par le théorème de Rolle qu'il existe $c_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $P'(c_k) = 0$.
Les réels $c_1, \ldots, c_{n-1}$ constituent alors $n-1$ racines distinctes de P', qui est de degré $n-1$ (puisque P est de degré $n \geqslant 1$).
On en déduit que P' est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{si } P \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \text{ à racines simples alors } P' \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \text{ à racines simples.}}$$

5.(a) Si α est une racine de P de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ alors d'après le cours, on a :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

On a donc :

$$P'(\alpha) = \cdots = (P')^{(m-2)}(\alpha) = 0 \text{ et } (P')^{(m-1)}(\alpha) \neq 0$$

donc α est une racine de P' de multiplicité $m-1$ (en prenant comme convention pour $m = 1$ qu'être racine de multiplicité 0 signifie ne pas être racine).

5.(b) On suppose que P est scindé sur $\mathbb{R}$.
Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les racines réelles distinctes de P rangées dans l'ordre croissant et $m_1, \ldots, m_p$ leurs multiplicités respectives.
Comme P est scindé sur $\mathbb{R}$, on a $\sum_{k=1}^{p} m_k = n$.

D'après le résultat de cours rappelé à la question 5.(a), les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des racines de P', de multiplicités respectives $m_1 - 1, \ldots, m_p - 1$.

D'autre part, en raisonnant comme à la question 4.(b), on obtient par le théorème de Rolle que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, il existe $c_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $P'(c_k) = 0$.
Les réels $c_1, \ldots, c_{p-1}$ constituent alors $p-1$ racines distinctes de P' supplémentaires (si $p = 1$ alors cette étape est inutile).

En comptant le nombre de racines de P' ainsi obtenues avec leurs multiplicités, on obtient au moins :

$$\sum_{k=1}^{p}(m_k - 1) + p - 1 = \sum_{k=1}^{p} m_k - p + p - 1 = n - 1$$

racines réelles de P', qui est un polynôme de degré $n-1$.
On en déduit que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{si } P \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \text{ alors } P' \text{ est scindé sur } \mathbb{R}.}$$

5.(c) Notons $P = X^6 - X + 1$. On a alors $P' = 6X^5 - 1$.
Le complexe $\left(\frac{1}{6}\right)^{1/5} e^{2i\pi/5}$ est une racine de P' qui n'est pas réelle (puisque $\frac{2}{5}\pi$ n'est pas congru à 0 modulo π) donc P' n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.
Par la contraposée du résultat obtenu en 5.(b), on en déduit que :

$$\boxed{\text{le polynôme } X^6 - X + 1 \text{ n'est pas scindé sur } \mathbb{R}.}$$