DEVOIR MAISON 2 - *Sur les séries*

À rendre le lundi 30 septembre

Autour des fonctions zêta et zêta alternée de Riemann

A. Introduction

1. Rappeler (sans preuve) quels sont les réels x pour lesquels la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge.
   Pour tout réel x tel que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge, on note :
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$
   La fonction ζ est appelée *fonction zêta de Riemann.*

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 0$.
   Pour tout réel $x > 0$, on note alors :
$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$
   La fonction F est appelée *fonction zêta alternée de Riemann.*

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de ζ et F.
Les différentes parties sont très largement indépendantes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On admet le développement asymptotique :
$$H_n = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \text{ où } \gamma \text{ est la constante d'Euler.}$$

B. Calcul de $F(1)$

On souhaite déterminer la valeur de $F(1)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant de deux manières $\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k\right) \mathrm{d}t$, montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t.$$

2. En déduire que $F(1) = \ln 2$.

C. Valeur de $\zeta(2)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2\cos^n(t)\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0, J_0, I_1 et J_1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
4. (a) Montrer que la fonction $t \mapsto -\sin(t)$ est convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   En déduire que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $t \leqslant \dfrac{\pi}{2}\sin(t)$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+2})$.

   (c) Montrer alors que la suite $\left(\dfrac{J_n}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)J_n - (n+2)^2 J_{n+2}}{2} \quad \text{puis que} \quad \frac{J_n}{I_n} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{2}{(n+2)^2}.$$

6. En déduire que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

D. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ est la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} c_n$, où $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$.
Dans cette partie, on veut déterminer la nature, selon la valeur de x, de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} c_n(x)$, produit de Cauchy de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même.
Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

1. Indiquer sans aucun calcul la nature et la somme, en fonction de F, de la série produit $\sum\limits_{n\geqslant 2} c_n(x)$ lorsque $x > 1$.
2. On suppose dans cette question que $0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}$. Montrer que :

$$|c_n(x)| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^x(n-k)^x} \geqslant \frac{1}{(n-1)^{2x-1}}.$$

   En déduire que la suite $(|c_n(x)|)_{n\geqslant 2}$ ne converge pas vers 0.
   Qu'en déduit-on sur la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} c_n(x)$?
3. On s'intéresse dans cette question au cas $x = 1$.

   (a) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\dfrac{1}{k(n-k)} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n-k}\right)$.
   En déduire une expression de $c_n(1)$ en fonction de $\dfrac{H_{n-1}}{n}$.

   (b) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\dfrac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 2}$.

   (c) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} c_n(1)$.

E. Limite en $+\infty$

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\left|\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leqslant \frac{1}{2^x}$.
   En déduire la limite de F en $+\infty$.
2. *Lien entre F et ζ*
   Calculer, pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et $\zeta(x)$. En déduire que :
   $$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$$
3. En déduire la limite de ζ en $+\infty$.

F. Développement asymptotique de ζ en 1

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1, 2]$:

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

1. Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1, 2]$, on a :
   $$0 \leqslant v_n(x) \leqslant \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$
2. En déduire que, pour $x \in [1, 2]$, la série $\sum_{n \geqslant 1} v_n(x)$ converge.
3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$ en fonction de γ.
4. Exprimer, pour $x \in]1, 2]$, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$ et de $1 - x$.
5. *Question réservée aux 5/2, résultat admis pour les 3/2 :*
   Montrer que $\lim_{x \to 1^+} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$.
6. En déduire que l'on a, pour x au voisinage de 1^+ :
   $$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$$