Analyse- Chapitre 1 : outils d'étude de fonctions
Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Déterminer dans chaque cas le domaine de définition, le domaine de dérivabilité "a priori" et l'expression de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto f(x)$:

1. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$
3. $f(x) = (x-3)(x-2)$
4. $f(x) = \cos(4x)$
5. $f(x) = \sin\left(\dfrac{2}{3}x + 2\right)$
6. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
7. $f(x) = (\sin(x))^3$
8. $f(x) = \sin(x^3)$
9. $f(x) = \tan(2x)$
10. $f(x) = \ln(x^4)$
11. $f(x) = 4\ln(x)$
12. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$
13. $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$
14. $f(x) = e^{\frac{x^3}{2}}$
15. $f(x) = \sqrt{e^{x^3}}$
16. $f(x) = \ln(\cos(x))$
17. $f(x) = x\ln(x) - x$
18. $f(x) = \sqrt{1 + \cos^2(x)}$
19. $f(x) = \ln(\ln(x))$

Exercice 2 :

Dresser le tableau de variation et tracer le graphe de la fonction

$$f \mapsto \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^3}$$

Exercice 3 :

Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.

Exercice 4 :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1 + x^2}$ et $g : x \mapsto \tan x$

1. Déterminez l'ensemble de définition de f, son domaine de dérivabilité et l'expression de sa dérivée.
2. Dressez le tableau de variation de f.
3. Justifiez que la fonction $h = g \circ f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Calculez $h'(x)$ et en déduire le tableau de variation de h.
5. Tracer le graphe de h.

Exercice 5 :

Soit $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2e^x + 1}{e^x + 2}\right)$

1. Montrez que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer son tableau de variation.

Exercice 6 :

Pour chacune des fonctions proposées, pourquoi ne peut-on pas dire directement que f est dérivable au point x_0 proposé ? Etudier la dérivabilité des fonctions f suivantes en ce point et calculez la valeur de la dérivée si elle existe.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x}{1 + |x|}$ en $x_0 = 0$.
2. $f : x \mapsto (x^2 - 4x + 3)\sqrt{x - 1}$ en $x_0 = 1$.
3. $f : x \mapsto x|x|$ en $x_0 = 0$

Exercice 7 :

Etudiez la fonction ci dessous (définition, tableau de variation)

$$f : x \mapsto \frac{x^2+3x+3}{x+2}.$$

Exercice 8 :

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left|\frac{x-1}{2x}\right| - x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée.
4. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation complet.
5. Déterminer les asymptotes du graphe de f.
6. Tracer l'allure du graphe de f.

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}$

1. Quel est D_f, l'ensemble de définition de f ?
2. Montrez que f est dérivable sur $D_f \setminus \{-1; 1\}$.
3. f est-elle dérivable en 1 et en -1 ? Donnez si elles existent l'équation des tangentes ou des demi-tangentes en 1 et -1.
4. Tracer le graph de f.

Exercice 10 :

1. Proposez une primitive aux fonctions ci dessous :

   a) $x \mapsto \frac{1}{x} - x$ b) $x \mapsto \cos(2x)$ c) $x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+x+2}$ d) $x \mapsto \frac{x-2}{x^2-4x+3}$

2. Soit $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+2x-3}$

   a) Déterminez D_f, l'ensemble de définition de f.

   b) Déterminez deux réels a et b tels que, pour tout $x \in D_f$,

   $$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$$

   c) En déduire une primitive de f

3. Calculez les intégrales suivantes

   a) $\int_0^1 x^3 dx$ c) $\int_1^2 \frac{3x^2+1}{x^3+x+1}dx$

   b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)dx$ d) $\int_1^{+\infty} \frac{3x^2+1}{x^3+x+1}dx$

Exercice 11 :

Déterminez les ensembles de définitions des fonctions de deux variables suivantes, et calculez leurs dérivées partielles par rapport à chacune des variables.

1. $f : (x,y) \mapsto x^2 + 2x - y^3 + 2$
2. $f : (x,y) \mapsto xy + e^{xy+x^2}$
3. $f : (x,y) \mapsto \frac{1}{x(1-y^2)}$
4. $f : (x,y) \mapsto x^2 y \cos(2x+y)$