

Algèbre - Chapitre 1 : Formalisme et notations

Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} . Traduire les phrases suivantes avec des quantificateurs :

1. La fonction f s'annule au moins une fois.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. La fonction f s'annule une seule fois sur l'intervalle $[0; 1]$.
4. La fonction f s'annule au moins deux fois sur \mathbb{R} .

Exercice 2 :

Soit \mathcal{T} un triangle. On considère les propositions suivantes :

A : \mathcal{T} est un triangle rectangle.

B : le carré de la longueur du plus grand côté est la somme des carrés des longueurs des deux plus petits.

On attribue à Pythagore les résultats suivants :

T : Aux triangles rectangles, le carré du côté qui soutient l'angle droit, est égal aux carrés des deux autres côtés.

R : Si le carré de l'un des côtés d'un triangle est égal aux carrés des deux autres côtés, l'angle entre ces côtés est droit.

1. Traduisez le théorème T et sa réciproque R en fonction des propositions A et B .
2. Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 6$. Laquelle des deux propositions de Pythagore utiliseriez-vous pour dire que ABC n'est pas rectangle ?

Exercice 3 :

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.

Que signifient les assertions suivantes pour cette fonction ?

- | | |
|---|---|
| 1. $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C.$ | 6. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in I, y = f(x).$ |
| 2. $\forall x \in I, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$ | 7. $\exists x \in I, \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x).$ |
| 3. $\forall x \in I, \forall y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$ | 8. $\forall x \in I, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M.$ |
| 4. $\forall x \in I, \forall y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$ | 9. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M.$ |
| 5. $\forall x \in I, \exists C \in \mathbb{R}, f(x) = C.$ | 10. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) \leq M.$ |

Exercice 4 :

Soient E et F deux intervalles et soit une fonction $f : E \rightarrow F$.

- | | |
|--|---|
| 1. Donner la négation de chacune des propositions suivantes : | 2. Ecrire la contraposée des implications suivantes : |
| A : $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$ | P : $x \geq \alpha \Rightarrow f(x) \geq \beta.$ |
| B : $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M.$ | Q : $a \in A \Rightarrow a \leq 1.$ |
| C : $\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$ | R : $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$ |

Exercice 5 :

Soient x et y deux réels. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $xy \geq 0$;

(ii) $x = 0$ ou $y = 0$ ou $(x > 0$ et $y > 0)$ ou $(x < 0$ et $y < 0)$.

Exercice 6 :

Montrez que si x et y sont deux réels tels que $xy > 0$ et $x + y \geq 0$, alors $x > 0$ et $y > 0$.

◆ Exercice 7 :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair, alors n est pair également.

◆ Exercice 8 :

Montrez que si x_1, x_2, \dots, x_n sont n réels positifs ou nuls, tels que leur somme est nulle, alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i = 0$.

◆ Exercice 9 :

Montrez que les deux assertions proposées sont équivalentes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geq n$ et $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 \geq x$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq 0$.
3. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \varepsilon$ et $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \varepsilon/2$

◆ Exercice 10 : quelques récurrences

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. On définit la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n + 2n$. Calculer S_1, S_2, S_3 et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n(n-1)$.
3. Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n \geq 0$ que $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$. On suppose que $u_0 = 1$ et $u_1 = 6$.
Montrez que pour tout $n \geq 0$, $u_n = (2n+1)2^n$
4. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + 4u_n}{3u_{n+1} + 2u_n}$. Déterminez la valeur de la suite u_n en fonction de n .
5. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 0, v_1 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = v_{n+1} + 3v_n$. Calculer v_2, v_3 et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq n5^n$.
6. On considère la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $w_0 = 0, w_1 = 1, w_2 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+3} = w_{n+2} + 2w_{n+1} + 3w_n$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq w_n \leq 3^n$.