L'arc-en-ciel Énoncé+Corrigé 7 points

On explique la formation de l'arc-en-ciel par la réflexion, à l'intérieur d'une goutte d'eau, d'un rayon lumineux provenant du soleil. Un rayon de lumière monochromatique, composant d'un faisceau de lumière blanche, pénètre dans une goutte d'eau sphérique et subit à l'intérieur de la goutte une réflexion. On cherche déterminer le minimum de déviation D, défini figure 1, pour une goutte d'indice n.

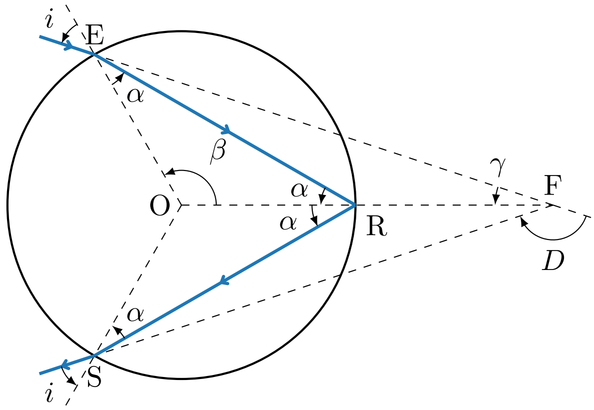

Figure 1 – *Trajectoire d'un rayon lumineux dans une goutte d'eau.*

1 pt **1.** En considérant le triangle OEF, déterminez la relation entre les angles i, γ et β, puis la relation entre les angles i, β et D.

La somme des angles dans un triangle fait π. Ainsi,

$$\boxed{i+\beta+\gamma=\pi} \blacktriangleright \text{0,5 pt}.$$

Or, au point F,

$$-D+2\gamma=\pi \Leftrightarrow \gamma=\frac{\pi+D}{2} \quad \text{donc} \quad i+\beta+\frac{\pi+D}{2}=\pi \Leftrightarrow \boxed{i+\beta+\frac{1}{2}D=\frac{\pi}{2}} \blacktriangleright \text{0,5 pt}.$$

0,5 pt **2.** En considérant le triangle OER, déterminez la relation entre les angles α et β.

La somme des angles dans un triangle fait π. Ainsi,

$$\boxed{2\alpha+\beta=\pi} \blacktriangleright \text{0,5 pt}.$$

0,5 pt **3.** Donnez l'expression de D en fonction de i et α.

En combinant les résultats précédents,

$$\left.\begin{aligned} D=\pi-2i-2\beta \\ \beta=\pi-2\alpha \end{aligned}\right\} D=\pi-2i-2(\pi-2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow D=\pi-2i-2\pi+4\alpha \Leftrightarrow \boxed{D=4\alpha-2i-\pi} \blacktriangleright \text{0,5 pt}.$$

1,5 pt **4.** En appliquant la troisième loi de Descartes, exprimez l'angle α en fonction de l'angle i, puis donnez l'expression de la dérivée par rapport à i de cette fonction $\alpha(i)$.

Indication : $\mathrm{d}f(x)=f'(x)\,\mathrm{d}x$.

D'après la troisième loi de Descartes,

$$n_{\text{air}}\sin i=n_{\text{eau}}\sin\alpha \quad \text{donc} \quad \boxed{\sin i=n\sin\alpha} \blacktriangleright \text{0,5 pt}$$

car $n_{\text{air}}\simeq 1$ et en notant $n=n_{\text{eau}}$. Alors, en différenciant cette expression,

$$\cos i\,\mathrm{d}i=n\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha \quad \text{ainsi} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}i}=\frac{1}{n}\frac{\cos i}{\cos\alpha}} \blacktriangleright \text{1 pt}.$$

1 pt **5.** Donnez une condition nécessaire sur i pour que D soit minimale. Déduisez-en une relation entre $\cos^2(i)$ et $\cos^2(\alpha)$.

Pour que D soit minimale, il faut que sa dérivée par rapport à i (car c'est par rapport à i qu'une condition est recherchée) soit nulle. Or,

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i}=4\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}i}-2=\frac{4}{n}\frac{\cos i}{\cos\alpha}-2 \blacktriangleright \text{0,5 pt}.$$

Alors, la valeur $i_{\min}$ de i minimisant D vérifie

$$\frac{4}{n}\frac{\cos i_{\text{i}}}{\cos\alpha}-2=0 \quad \text{soit} \quad \boxed{n^2\cos^2\alpha=4\cos^2 i_{\min}} \blacktriangleright \text{0,5 pt}.$$

1 pt **6.** Comment peut-on éliminer α dans la relation de la question 5 ? Trouvez ainsi, en fonction de n, la valeur de $\sin(i)$ pour laquelle la déviation du rayon incident est minimale.

Il est possible d'éliminer α en remarquant que $\cos^2 = 1 - \sin^2$ ▶ 0,5 pt et en utilisant la loi de Descartes pour relier $\sin\alpha$ à $\sin i$. Ainsi,

$$4\cos^2 i_{\text{min}} = 4(1-\sin^2 i_{\text{min}}) = n^2(1-\sin^2\alpha) = n^2(1-\frac{\sin^2 i_{\text{min}}}{n^2}) = n^2 - \sin^2 i_{\text{min}}$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4\sin^2 i_{\text{min}} = n^2 - \sin^2 i_{\text{min}} \Leftrightarrow 3\sin^2 i_{\text{min}} = 4 - n^2 \quad \text{donc} \quad \boxed{\sin i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}}$$ ▶ 0,5 pt .

0,5 pt **7.** On définit l'angle $\epsilon = D + \pi$. Que représente ϵ sur le schéma ?

Il s'agit de l'angle entre le rayon en entrée et le rayon en sortie de la goutte d'eau. ▶ 0,5 pt.

1 pt **8.** Pour ϵ_{max} associé à la déviation minimale D_{min}, on donne $\mathrm{d}\epsilon_{\text{max}} = K\tan(\alpha)\frac{\mathrm{d}\lambda}{n\lambda^3}$, où K est une constante positive. Expliquez l'ordre des couleurs de l'arc-en-ciel, sachant que l'intensité émergeante est maximale lorsque la déviation est minimale.

L'expression de l'énoncé permet d'obtenir

$$\frac{\mathrm{d}\epsilon_{\text{max}}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{K\tan(\alpha)}{n\lambda^3} > 0\,.$$

Donc, ϵ_{max} est une fonction croissante de la longueur d'onde. ▶ 0,5 pt Or, $\lambda_{\text{rouge}} > \lambda_{\text{bleu}}$. Ainsi, $\epsilon_{\text{max}}^{\text{rouge}} > \epsilon_{\text{max}}^{\text{bleu}}$. Pour qu'un rayon rouge arrive jusqu'à l'œil d'un observateur, il faut donc qu'il soit dévié par une goutte située plus haut dans le ciel que pour un rayon bleu, tel qu'illustré en figure 2. Alors, le rouge apparait au-dessus du bleu dans le ciel. ▶ 0,5 pt

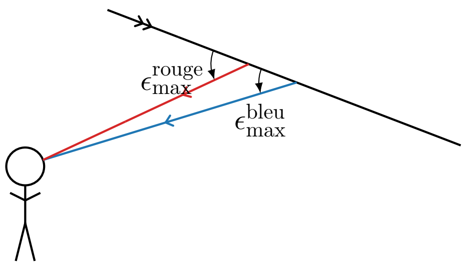

Figure 2 – *Rayons déviés par une goutte de pluie donnant un arc-en-ciel.*