DEVOIR SURVEILLÉ 1 - 18/09/24 - *Durée 4h*

Exercice 1

A. Résultats préliminaires

Dans cette partie, on établit quelques résultats préliminaires qui seront utilisés dans la suite.

1. Pour $n \geqslant 1$, on pose : $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$.
   (a) Étudier la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge. On note γ sa limite.

2. Soit $x \in]0, +\infty[$. On considère l'application h_x de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$h_x(t) = \frac{\ln(t)}{t^x}.$$
   (a) Déterminer le tableau de variation de h_x.
   (b) Justifier les inégalités :
$$\forall n \geqslant 3,\ \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln(n)}{n} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 4,\ \frac{\ln(n)}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$
   (c) Prouver que la série $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ est convergente mais qu'elle n'est pas absolument convergente.
   On pose :
$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}.$$

B. Calcul de S

On se propose dans cette partie de calculer la valeur de S.

Pour $n \geqslant 3$, on pose :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k},\ t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k},\ a_n = t_n - \frac{(\ln(n))^2}{2}.$$

1. Utiliser les inégalités établies en question 2.(b) de la partie A pour démontrer que :
   (a) la suite $(a_n)_{n \geqslant 3}$ est décroissante,
   (b) la suite $(a_n)_{n \geqslant 3}$ converge.

2. (a) Montrer que $\forall n \geqslant 3,\ S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \ln(2)$.

   (b) En déduire une expression de S_{2n} où figurent a_n, a_{2n} et u_n.

3. Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_{2n}$ (on exprimera cette limite en fonction de γ et de $\ln(2)$) et en déduire S.

Exercice 2

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}),\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

1. On prend **dans cette question**, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}$.

   (a) Justifier que la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ converge et donner sa somme.

   (b) Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} b_n$ converge et calculer sa somme.

2. On prend **dans cette question**, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

   (a) Vérifier que la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ converge et calculer sa somme.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$.
   Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} n x^{n-1}$ converge et que sa somme vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)^2$.
   En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$ en fonction de x.

   (c) Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} b_n$ converge et calculer sa somme.

3. On prend **dans cette question**, $a_n = \dfrac{1}{n \ln(n)}$, $n \geqslant 2$ et $a_1 = 0$.

   (a) À l'aide d'une comparaison série/intégrale, déterminer la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n$.

   (b) Montrer qu'on a $b_n \sim \dfrac{1}{n \ln n}$.

   (c) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} b_n$?

4. On suppose **dans cette question** que la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

   (a) Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n a_{2n} \leqslant u_n$.

   (b) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} n a_{2n} = 0$.

(c) Démontrer alors que $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

(d) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\big(na_n - (n+1)a_{n+1}\big)$ converge.

(e) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge.

(f) Montrer qu'on a de plus $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

5. On suppose **dans cette question** que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

   (a) Vérifier que $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ m \leqslant n,\ B_n \geqslant A_m - ma_{n+1}$.

   (b) En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

Exercice 3

Dans tout cet exercice, p désigne un entier naturel et $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite de nombres réels.

On appelle *produit infini* $\prod_{n\geqslant p} u_n$ la suite $(P_n)_{n\geqslant p}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geqslant p, \quad P_n = \prod_{k=p}^{n} u_k.$$

Lorsque le produit infini $\prod_{n\geqslant p} u_n$ converge, on pose :

$$\prod_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} P_n.$$

A. Quelques résultats théoriques

1. Dans cette question, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$, $u_n \neq 0$.
   En considérant le quotient $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$, montrer que si le produit infini $\prod_{n\geqslant p} u_n$ converge vers un réel non nul alors la suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ converge vers 1.

2. Dans cette question, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$, $u_n > 0$.
   Montrer que le produit infini $\prod_{n\geqslant p} u_n$ converge vers un réel non nul si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant p} \ln(u_n)$ converge.

3. Dans cette question, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$, $u_n \geqslant 0$.
   Montrer que le produit infini $\prod_{n\geqslant p}(1+u_n)$ converge vers un réel non nul si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant p} u_n$ converge.

4. Montrer que l'équivalence de la question précédente est encore valable si l'on suppose désormais que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$, $-1 < u_n \leqslant 0$.

B. Applications

1. (a) En utilisant la partie A, montrer que le produit infini $\prod_{n\geqslant 2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge vers un réel non nul.

   (b) Pour tout $n \geqslant 2$, calculer $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ et en déduire la valeur de $\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

2. Soit $x \in]0,+\infty[$. Montrer que le produit infini $\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$ converge vers un réel non nul.

3. Retrouver, en utilisant un produit infini, que la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge.

C. Étude de $\prod_{n\geqslant p}(1+u_n)$ lorsque (u_n) n'est pas nécessairement de signe constant

On suppose dans cette partie que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$, $u_n > -1$ et que la série $\sum_{n\geqslant p} u_n$ converge.

1. Montrer que si la série $\sum_{n\geqslant p} u_n$ converge absolument alors le produit infini $\prod_{n\geqslant p}(1+u_n)$ converge vers un réel non nul.

2. Montrer que si la série $\sum_{n\geqslant p} u_n^2$ converge alors le produit infini $\prod_{n\geqslant p}(1+u_n)$ converge vers un réel non nul.

3. Montrer que si la série $\sum_{n\geqslant p} u_n^2$ diverge alors le produit infini $\prod_{n\geqslant p}(1+u_n)$ converge vers 0.

4. *Application 1 :* Déterminer $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$.
   On pourra utiliser la question A.2.(a) de l'exercice 1.

5. *Application 2 :* Déterminer $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.
   On pourra, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\prod_{k=2}^{2n}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.