CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 1

Exercice 1 (d'après E3A PSI 2005)

A.1.(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

On connaît les développements limités :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \underset{x\to 0}{o}(x) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a alors :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On a alors :
$\boxed{1}$ $-(u_{n+1}-u_n) \sim \frac{1}{2n^2}$, $\boxed{2}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2n^2} \geqslant 0$, $\boxed{3}$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$ et constante multiplicative).
Par comparaison par équivalent, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(u_n - u_{n+1})$ converge donc par multiplication du terme général par -1, on obtient que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1} - u_n) \text{ converge.}}$$

A.1.(b) D'après le cours, la série télescopique $\sum\limits_{n\geqslant 1}(u_{n+1} - u_n)$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ sont de même nature. On déduit donc de la question 1.(a) que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$$

A.2.(a) La fonction h_x est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout $t \in]0, +\infty[$:

$$h_x'(t) = \frac{\frac{1}{t} \times t^x - \ln(t) \times x t^{x-1}}{t^{2x}} = \frac{1 - x\ln t}{t^{x+1}}.$$

Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $t^{x+1} > 0$ et on a :

$$1 - x\ln t \geqslant 0 \Leftrightarrow x\ln t \leqslant 1 \Leftrightarrow \ln t \leqslant \frac{1}{x} \Leftrightarrow t \leqslant e^{1/x}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{h_x \text{ est croissante sur }]0, e^{1/x}] \text{ et décroissante sur } [e^{1/x}, +\infty[.}$$

A.2.(b) Utilisons la question précédente avec $x = 1$. La fonction h_1 est décroissante sur $[e, +\infty[$ donc sur $[3, +\infty[$ (puisque $e \leqslant 3$).

Soit $n \geqslant 3$. On a donc pour tout $t \in [n, n+1]$, $h_1(t) \leqslant h_1(n)$ donc par croissance de l'intégrale ($n \leqslant n+1$ et on intègre des fonctions continues sur le segment $[n, n+1]$), on obtient :

$$\int_n^{n+1} h_1(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} h_1(n)\mathrm{d}t = h_1(n)(n+1-n) = h_1(n).$$

De même, pour $n \geqslant 4$, comme $[n-1, n] \subset [3, +\infty[$, on a pour tout $t \in [n-1, n]$, $h_1(n) \leqslant h_1(t)$ donc par croissance de l'intégrale, $h_1(n) \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} h_1(t)\mathrm{d}t$.

On a donc établi :

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln(n)}{n} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 4,\ \frac{\ln(n)}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t.}$$

A.2.(c) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ est alternée car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\ln n}{n} \geqslant 0$.
De plus, la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)_{n\geqslant 3} = (h_1(n))_{n\geqslant 3}$ est décroissante (car h_1 est décroissante sur $[3, +\infty[$) et converge vers 0 par croissances comparées.
Par le théorème spécial des séries alternées, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ converge.
La nature d'une série ne dépendant pas de ses premiers termes, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} \text{ converge.}}$$

$\boxed{1}$ On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$:

$$\left|(-1)^n \frac{\ln n}{n}\right| = \frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{\ln 2}{n}.$$

$\boxed{2}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\ln 2}{n} \geqslant 0$.

$\boxed{3}$ La série harmonique diverge et $\ln 2 \neq 0$ donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln 2}{n}$ diverge.

Par comparaison par inégalité, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n}$ diverge donc :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} \text{ ne converge pas absolument.}}$$

N.B. : On pouvait aussi utiliser la première inégalité de la question A.2.(b).
En sommant pour n allant de 3 à $N-1$ où $N \geqslant 4$, on obtient par la relation de Chasles :

$$\int_3^N \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln N}{N}.$$

En calculant l'intégrale, on obtient :

$$\frac{1}{2}(\ln N)^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2 + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln N}{N} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln n}{n}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2}(\ln N)^2 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{\ln N}{N} = 0$ par croissances comparées, le membre de gauche tend vers $+\infty$ d'où par inégalité, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln n}{n} = +\infty$. On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n}$ diverge.

B.1.(a) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 4$. On a :

$$a_n - a_{n-1} = t_n - \frac{(\ln(n))^2}{2} - t_{n-1} + \frac{(\ln(n-1))^2}{2} = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{(\ln(n))^2}{2} + \frac{(\ln(n-1))^2}{2}.$$

Or, on a :

$$\int_{n-1}^{n} \frac{\ln t}{t} \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\left(\ln t\right)^2\right]_{n-1}^{n} = \frac{(\ln(n))^2}{2} - \frac{(\ln(n-1))^2}{2}.$$

Ainsi d'après A.2.(b) :

$$a_n - a_{n-1} = \frac{\ln(n)}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{\ln t}{t} \mathrm{d}t \leqslant 0.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\geqslant 3} \text{ est décroissante.}}$$

B.1.(b) Montrons que la suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ est minorée.
On sait que pour tout $k \geqslant 3$, $\displaystyle\int_{k}^{k+1} \frac{\ln t}{t} \mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln k}{k}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$. En sommant pour k allant de 3 à $n-1$, on obtient par la relation de Chasles :

$$\int_{3}^{n} \frac{\ln t}{t} \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=3}^{n-1} \frac{\ln k}{k}.$$

Or :

$$\int_{3}^{n} \frac{\ln t}{t} \mathrm{d}t = \frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=3}^{n-1} \frac{\ln k}{k} = t_n - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln n}{n}.$$

On en déduit que :

$$a_n = t_n - \frac{(\ln n)^2}{2} \geqslant \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln n}{n} - \frac{(\ln 3)^2}{2} \geqslant \frac{\ln 2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}.$$

Ainsi, la suite $(a_n)_{n\geqslant 4}$ est décroissante et minorée donc par le théorème de la limite monotone :

$$\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\geqslant 3} \text{ converge.}}$$

B.2.(a) Soit $n \geqslant 3$. En séparant les termes d'indices pairs et impairs, on obtient :

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p)}{2p} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\ln(2p+1)}{2p+1}$$

et :

$$t_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p)}{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\ln(2p+1)}{2p+1}.$$

En sommant, on obtient :

$$S_{2n} + t_{2n} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p)}{p} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln 2 + \ln p}{p} = \ln 2 \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) + t_n.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \ln(2).}$$

B.2.(b) Comme pour tout $n \geqslant 3$, $t_n = a_n + \dfrac{(\ln n)^2}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_n + \ln n$, on obtient :

$$S_{2n} = a_n + \frac{(\ln n)^2}{2} - \left(a_{2n} + \frac{(\ln(2n))^2}{2}\right) + (u_n + \ln n) \ln(2).$$

En développant $(\ln(2n))^2 = (\ln 2 + \ln n)^2$, on obtient :

$$\boxed{S_{2n} = a_n - a_{2n} + u_n \ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}.}$$

3. On sait que la suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ converge. La suite extraite $(a_{2n})_{n\geqslant 3}$ converge vers la même limite donc par linéarité, la suite $(a_n - a_{2n})_{n\geqslant 3}$ converge vers 0.
On sait par ailleurs que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers γ.
On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \gamma \ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}.}$$

Par définition, la suite $(S_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers S donc la suite extraite $(S_{2n})_{n\geqslant 3}$ converge aussi vers S.
Par unicité de la limite, on en déduit que :

$$\boxed{S = \gamma \ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}.}$$

Exercice 2 (d'après E3A PSI 2016)

1.(a) Par décalage d'indice, on a $\sum_{n\geqslant 1} a_n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{n!}$ donc il s'agit d'une série exponentielle.
Par le cours, on en déduit que :

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ converge et a pour somme } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = e^2.}$$

1.(b) On s'intéresse à la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$.
Soit $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geqslant 1$. On a par linéarité :

$$\sum_{n=1}^{N} b_n = \sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{2^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{2^n}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{N} n\frac{2^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{n2^n}{n!}.$$

Par décalage d'indice, on a alors :

$$\sum_{n=1}^{N} b_n = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(n+1)2^n}{n!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{n2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{n2^n}{n!} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2^n}{n!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{n2^n}{n!}.$$

En simplifiant la première et la troisième somme, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{N} b_n = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2^n}{n!} + \frac{0\times 2^0}{0!} - \frac{N2^N}{N!} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2^n}{n!} - \frac{2^N}{(N-1)!}.$$

Or, on sait que $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2^n}{n!} = e^2$ (série exponentielle avec décalage d'indice sur la suite des sommes partielles).
On a également $\lim_{N\to+\infty} \frac{2^N}{N!} = 0$ (terme général d'une série convergente) donc on a aussi $\lim_{N\to+\infty} \frac{2^{N-1}}{(N-1)!} = 0$ (par décalage d'indice) et donc $\lim_{N\to+\infty} \frac{2^N}{(N-1)!} = 0$ (en multipliant par 2).
Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^2.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} b_n \text{ converge et on a } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = e^2.}$$

2.(a) Par décalage d'indice, on a $\sum_{n\geqslant 1} a_n = \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc il s'agit d'une série géométrique de raison $1/2 \in]-1,1[$ donc elle converge et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ converge et sa somme vaut } 2.}$$

2.(b) Le produit de Cauchy de la série $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ avec elle-même est la série $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} x^n = (n+1)x^n$. C'est donc la série $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n = \sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$.
Comme $|x| < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ converge absolument et sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
Par produit de Cauchy, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$ converge absolument (donc converge) et qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}.}$$

2.(c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n = n\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Comme $1/2 \in]-1,1[$, d'après la question précédente, la série $\sum_{n\geqslant 1} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ converge et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{(1-1/2)^2} = 4.$$

Ainsi par linéarité :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} b_n \text{ converge et on a } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \frac{1}{2}\times 4 = 2.}$$

3.(a) Considérons la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t\ln t}$. Elle est continue et décroissante sur $[2,+\infty[$ (car les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln t$ sont croissantes et positives sur $[2,+\infty[$ donc par produit, $t \mapsto t\ln t$ est croissante sur $[2,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc son inverse est décroissante sur $[2,+\infty[$).
On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k\ln k}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$. En sommant les inégalités pour k allant de 2 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \sum_{k=2}^{n-1}\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k}.$$

En notant $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$, on a :

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln k} = S_n - \frac{1}{2\ln 2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} = S_n - \frac{1}{n \ln n}.$$

Par la relation de Chasles, on a :

$$\sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln t} \mathrm{d}t = \int_2^n \frac{1/t}{\ln t} \mathrm{d}t = [\ln|\ln t|]_2^n = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2).$$

On a donc :

$$S_n - \frac{1}{2\ln 2} \leqslant \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \leqslant S_n - \frac{1}{n\ln n}.$$

Ainsi :

$$\ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{n \ln n} \leqslant S_n.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{n\ln n}\right) = +\infty$, on en déduit par inégalité que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
Comme la suite de ses sommes partielles diverge, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ diverge.}}$$

3.(b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} b_n &= n\left(\frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right) = \frac{1}{\ln n} - \frac{n}{(n+1)\ln(n+1)} \\ &= \frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln n}{(n+1)(\ln n)\ln(n+1)} = \frac{n\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(n+1)}{(n+1)(\ln n)\ln(n+1)}. \end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ donc $n\ln(1+\frac{1}{n}) \sim 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = 1$.
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on en déduit que $n\ln(1+\frac{1}{n}) = o\big(\ln(n+1)\big)$.
Ainsi, $n\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(n+1) \sim \ln(n+1)$.
On en déduit que $b_n \sim \dfrac{\ln(n+1)}{n(\ln n)\ln(n+1)} = \dfrac{1}{n\ln n}$.
D'où :

$$\boxed{b_n \sim \frac{1}{n\ln n}.}$$

3.(c) On a : $\boxed{1}$ $b_n \sim a_n$, $\boxed{2}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant 0$, $\boxed{3}$ La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ diverge d'après 3.a).
Donc par comparaison par équivalent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} b_n \text{ diverge.}}$$

4.(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Par décroissance, on a pour tout $p \in [\![n+1, 2n]\!]$, $a_p \geqslant a_{2n}$.
Par somme, on en déduit que $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{2n} a_p \geqslant \sum_{p=n+1}^{2n} a_{2n}$.
On somme un terme constant donc $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{2n} a_{2n} = (2n - (n+1) + 1)a_{2n} = na_{2n}$.
Ainsi :

$$\boxed{na_{2n} \leqslant u_n.}$$

4.(b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant na_{2n} \leqslant u_n$.
De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = A_{2n} - A_n$.
Comme la série $\sum a_n$ converge, par définition, la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

La suite extraite $(A_{2n})_{n\geqslant 1}$ converge donc également vers $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Par suite, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 0$.
Par le théorème de limite par encadrement, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} na_{2n} = 0.}$$

4.(c) D'après la question précédente, on a $\lim_{n\to+\infty} 2na_{2n} = 0$.
Montrons qu'on a également $\lim_{n\to+\infty} (2n+1)a_{2n+1} = 0$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(2n+1)a_{2n+1} = 2na_{2n+1} + a_{2n+1}$.
Par décroissance, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant na_{2n+1} \leqslant na_{2n}$.
Comme $\lim_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$, on obtient par encadrement $\lim_{n\to+\infty} na_{2n+1} = 0$.
Comme la série $\sum a_n$ converge, on a $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$ (suite extraite).
On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} (2n+1)a_{2n+1} = 0$.
Par propriété des suites extraites d'indices pairs et impairs, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} na_n = 0.}$$

4.(d) La série $\sum_{n\geqslant 1}\big(na_n - (n+1)a_{n+1}\big)$ est une série télescopique.
Comme la suite $(na_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge d'après la question précédente, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1}\big(na_n - (n+1)a_{n+1}\big) \text{ converge.}}$$

4.(e) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}) = na_n - (n+1)a_{n+1} + a_{n+1}.$$

D'après la question précédente, la série $\sum\big(na_n - (n+1)a_{n+1}\big)$ converge.
De plus, la série $\sum_{n\geqslant 1} a_{n+1} = \sum_{n\geqslant 2} a_n$ converge par hypothèse.
Par linéarité, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \textstyle\sum_{n\geqslant 1} b_n \text{ converge.}}$$

4.(f) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}\big(ka_k - (k+1)a_{k+1}\big) + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = a_1 - (n+1)a_{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} a_k = A_{n+1} - (n+1)a_{n+1}.$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} A_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} A_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ (série convergente, décalage d'indice) et $\lim_{n\to+\infty} (n+1)a_{n+1} = 0$ (décalage d'indice).
On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.
Ainsi :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.}$$

5.(a) Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant m \leqslant n$.
On a comme vu à la question 4.(f) : $B_n = A_{n+1} - (n+1)a_{n+1}$.
Par décroissance, on a :

$$\sum_{k=m+1}^{n+1} a_k \geqslant \sum_{k=m+1}^{n+1} a_{n+1} = (n+1-(m+1)+1)a_{n+1} \text{ c'est-à-dire } A_{n+1} - A_m \geqslant (n-m+1)a_{n+1}.$$

On en déduit $A_{n+1} - (n+1)a_{n+1} \geqslant A_m - ma_{n+1}$.
Ainsi :

$$\boxed{B_n \geqslant A_m - ma_{n+1}.}$$

5.(b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a pour tout $n \geqslant m$, $B_n \geqslant A_m - ma_{n+1}$.
Comme la série $\sum b_n$ converge, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ et on a également par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0$ donc par passage à la limite $n \to +\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \geqslant A_m.$$

On en déduit que la suite $(A_m)_{m\geqslant1}$ est majorée.
La série $\sum a_n$ est une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant1} a_n \text{ converge.}}$$

Exercice 3 (d'après CCINP MP 2002, E3A PSI 2003, Centrale PC 2024)

A.1. On suppose que le produit infini $\prod_{n\geqslant p} u_n$ converge vers un réel ℓ non nul.

Notons que pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant p$, $P_n\neq 0$ en tant que produit (fini) de réels tous non nuls et on a :

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{\prod_{k=p}^{n+1}u_k}{\prod_{k=p}^{n}u_k}=u_{n+1}.$$

On a par définition $\lim_{n\to+\infty}P_n=\ell$ et par décalage d'indice, on a aussi $\lim_{n\to+\infty}P_{n+1}=\ell$ donc par quotient, puisque $\ell\in\mathbb{R}^*$, on a $\lim_{n\to+\infty}\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{\ell}{\ell}=1$.

On a donc $\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=1$ d'où par décalage d'indice, $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$.

$$\boxed{\text{Si le produit infini } \prod_{n\geqslant p} u_n \text{ converge vers un réel non nul alors la suite } (u_n)_{n\geqslant p} \text{ converge vers 1.}}$$

A.2. On a pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant p$, $P_n=\prod_{k=p}^{n}u_k>0$ avec pour tout $k\in[\![p,n]\!]$, $u_k>0$ d'où :

$$\ln(P_n)=\sum_{k=p}^{n}\ln(u_k).$$

⋆ On suppose que le produit infini $\prod_{n\geqslant p} u_n$ converge vers un réel ℓ non nul.

On a donc $\lim_{n\to+\infty}P_n=\ell$ avec $\ell>0$ (la limite étant positive en tant que limite d'une suite de termes positifs, et non nulle) donc par continuité de la fonction ln sur $]0,+\infty[$, $\lim_{n\to+\infty}\ln(P_n)=\ln(\ell)$.

On en déduit que la suite $\left(\sum_{k=p}^{n}\ln(u_k)\right)_{n\geqslant p}$ converge ce qui signifie que la série $\sum_{n\geqslant p}\ln(u_n)$ converge.

⋆ Réciproquement, on suppose que la série $\sum_{n\geqslant p}\ln(u_n)$ converge.

Cela signifie que la suite $(\ln(P_n))_{n\geqslant p}$ converge vers un réel ℓ.

Par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}P_n=e^{\ell}$ et $e^{\ell}\neq 0$.

On en déduit l'équivalence :

$$\boxed{\text{le produit infini } \prod_{n\geqslant p} u_n \text{ converge vers un réel non nul si et seulement si la série } \sum_{n\geqslant p}\ln(u_n) \text{ converge.}}$$

A.3. ⋆ On suppose que le produit infini $\prod_{n\geqslant p}(1+u_n)$ converge vers un réel non nul.

Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant p$, $1+u_n\geqslant 1>0$, on déduit :

- de la question A.1 que la suite $(1+u_n)_{n\geqslant p}$ converge vers 1 donc la suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ converge vers 0,
- de la question A.2 que la série $\sum_{n\geqslant p}\ln(1+u_n)$ converge.

$\boxed{1}$ Comme $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$, on a $\ln(1+u_n)\sim u_n$.

$\boxed{2}$ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant p$, $u_n\geqslant 0$.

$\boxed{3}$ La série $\sum_{n\geqslant p}\ln(1+u_n)$ converge.

Par le théorème de comparaison par équivalent, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant p}u_n$ converge.

⋆ Réciproquement, on suppose que la série $\sum_{n\geqslant p}u_n$ converge.

$\boxed{1}$ Comme $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ (terme général d'une série convergente), on a $\ln(1+u_n)\sim u_n$.

$\boxed{2}$ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant p$, $u_n\geqslant 0$.

$\boxed{3}$ La série $\sum_{n\geqslant p}u_n$ converge.

Par le théorème de comparaison par équivalent, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant p}\ln(1+u_n)$ converge.
Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant p$, $1+u_n>0$, on en déduit par la question A.2 que le produit infini $\prod_{n\geqslant p}(1+u_n)$ converge vers un réel non nul.
On en déduit l'équivalence :

$$\boxed{\text{le produit infini } \prod_{n\geqslant p}(1+u_n) \text{ converge vers un réel non nul si et seulement si la série } \sum_{n\geqslant p}u_n \text{ converge.}}$$

A.4. Reprenons le raisonnement de la question précédente.
Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant p$, $u_n+1>0$, on peut de la même façon appliquer les questions A.1 et A.2.
On a toujours $\ln(1+u_n)\sim u_n$ donc $-\ln(1+u_n)\sim -u_n$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant p$, $-u_n\geqslant 0$.
Par le théorème de comparaison par équivalent, on en déduit que les séries $\sum_{n\geqslant p}(-\ln(1+u_n))$ et $\sum_{n\geqslant p}(-u_n)$ sont de même nature.
Multiplier le terme général par -1 (réel non nul) ne change pas la nature d'une série donc les séries $\sum_{n\geqslant p}\ln(1+u_n)$ et $\sum_{n\geqslant p}u_n$ sont de même nature d'où le résultat.

$$\boxed{\text{l'équivalence de A.3 est encore valable en supposant que pour tout } n\in\mathbb{N} \text{ tel que } n\geqslant p,\ -1<u_n\leqslant 0.}$$

B.1.(a) Utilisons A.4. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 2$, on pose $u_n=-\dfrac{1}{n^2}$.
On a pour tout $n\geqslant 2$, $-1<u_n\leqslant 0$ et la série $\sum_{n\geqslant 2}\left(-\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge car elle est de même nature que la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n^2}$ avec $2>1$.
Par la question A.4, on en déduit que :

$$\boxed{\text{le produit infini } \prod_{n\geqslant 2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \text{ converge vers un réel non nul.}}$$

B.1.(b) Soit $n\geqslant 2$. On a :

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\frac{\prod_{k=1}^{n-1}k\prod_{k=3}^{n+1}k}{\left(\prod_{k=2}^{n}k\right)^2}$$

par décalage d'indice. En simplifiant, on obtient :

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{n}\times\frac{n+1}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)=\dfrac{1}{2}$ d'où :

$$\boxed{\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{2}.}$$

B.2. Utilisons A.2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$.
On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>0$ et :

$$\ln(u_n)=\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}=\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{x}{n}=-\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x}{n}=0$.

On en déduit que :

$\boxed{1}$ $-\ln(u_n) \sim \dfrac{x^2}{2n^2}$

$\boxed{2}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{x^2}{2n^2} \geqslant 0$.

$\boxed{3}$ La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^2}{2}\frac{1}{n^2}$ converge ($2 > 1$).

Par comparaison, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\big(-\ln(u_n)\big)$ converge donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln(u_n)$ converge.

Par la question A.2, on en déduit que :

$$\boxed{\text{le produit infini } \prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}} \text{ converge vers un réel non nul.}}$$

B.3. Utilisons A.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$.

Étudions le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1}k}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ainsi, le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge donc par la question A.3, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série harmonique } \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n} \text{ diverge.}}$$

C.1. On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant p} u_n$ converge absolument.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant p$, $1 + u_n > 0$. Utilisons A.2.

$\boxed{1}$ Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ (terme général d'une série convergente), $\ln(1+u_n) \sim u_n$ donc $|\ln(1+u_n)| \sim |u_n|$.

$\boxed{2}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant p$, $|u_n| \geqslant 0$.

$\boxed{3}$ La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant p}|u_n|$ converge.

Par le théorème de comparaison par équivalent, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant p}|\ln(1+u_n)|$ converge donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant p}\ln(1+u_n)$ converge absolument donc converge.

On en déduit par la question A.2 que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant p}(1+u_n)$ converge vers un réel non nul.

Ainsi :

$$\boxed{\text{si la série } \sum_{n\geqslant p} u_n \text{ converge absolument alors le produit infini } \prod_{n\geqslant p}(1+u_n) \text{ converge vers un réel non nul.}}$$

C.2 On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant p} u_n^2$ converge.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant p$, $1 + u_n > 0$. Utilisons A.2.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ (terme général d'une série convergente), on a :

$$\ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2).$$

$\star$ La série $\sum_{n\geqslant p} u_n$ converge.

$\star$ Posons $v_n = -\dfrac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$.

$\boxed{1}$ On a $v_n \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$ donc $-v_n \sim \dfrac{u_n^2}{2}$.

$\boxed{2}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant p$, $\dfrac{u_n^2}{2} \geqslant 0$.

$\boxed{3}$ La série $\sum_{n\geqslant p} u_n^2$ converge donc la série $\sum_{n\geqslant p} \dfrac{u_n^2}{2}$ aussi.

On en déduit par comparaison que la série $\sum_{n\geqslant p}(-v_n)$ converge donc la série $\sum_{n\geqslant p} v_n$ aussi.

Par somme, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant p} \ln(1+u_n)$ converge.

On en déduit par la question A.2 que le produit infini $\prod_{n\geqslant p}(1+u_n)$ converge vers un réel non nul.

Ainsi :

$$\boxed{\text{si la série } \sum_{n\geqslant p} u_n^2 \text{ converge alors le produit infini } \prod_{n\geqslant p}(1+u_n) \text{ converge vers un réel non nul.}}$$

C.3. On suppose que la série $\sum_{n\geqslant p} u_n^2$ diverge.

Raisonnons comme à la question précédente. On a :

$$\ln(1+u_n) = u_n + v_n \text{ où } v_n = -\frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2).$$

$\star$ La série $\sum_{n\geqslant p} u_n$ converge.

$\star$ On montre comme précédemment que la série $\sum_{n\geqslant p}(-v_n)$ est de même nature que la série $\sum_{n\geqslant p} \dfrac{1}{2}u_n^2$ (car $-v_n \sim \dfrac{u_n^2}{2}$ et termes tous positifs) donc divergente (1/2 est une constante multiplicative non nulle). Précisons que comme il s'agit d'une série à termes positifs à partir d'un certain rang, la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant p$:

$$\sum_{k=p}^{n} \ln(1+u_k) = \sum_{k=p}^{n} u_k - \sum_{k=p}^{n}(-v_k).$$

Comme $\left(\sum_{k=p}^{n} u_k\right)_{n\geqslant p}$ converge et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=p}^{n}(-v_k) = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=p}^{n} \ln(1+u_k) = -\infty$.

En composant par la limite $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} \exp\left(\sum_{k=p}^{n} \ln(1+u_k)\right) = 0$ ou encore :

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=p}^{n}(1+u_k) = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{si la série } \sum_{n\geqslant p} u_n^2 \text{ diverge alors le produit infini } \prod_{n\geqslant p}(1+u_n) \text{ converge vers } 0.}$$

C.4. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

Vérifions que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > -1$.

Si n est pair alors $u_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \geqslant 0 > -1$.

Si n est impair alors $u_n = -\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = -h_{1/2}(n)$ où $h_{1/2}$ est la fonction définie dans l'exercice 1, en A.2.
D'après son tableau de variation, la fonction $h_{1/2}$ admet un maximum sur $]0,+\infty[$ atteint en e^2 qui vaut $h_{1/2}(e^2) = \dfrac{2}{e} < 1$. On en déduit que $u_n > -1$.
⋆ La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n = \sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \geqslant 0$.
De plus, la suite $\left(\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante à partir d'un certain rang (car $h_{1/2}$ est décroissante sur $[e^2,+\infty[$ donc l'entier qui suit e^2 convient) et converge vers 0 par croissances comparées.
On en déduit par le théorème spécial des séries alternées que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge (la nature ne dépendant pas des premiers termes).
⋆ La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n^2 = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln^2 n}{n}$ diverge car pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $u_n^2 \geqslant \dfrac{\ln^2 2}{n} \geqslant 0$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge d'où le résultat par comparaison par inégalité.
Par la question C.3, on en déduit que :

$$\boxed{\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right) = 0.}$$

C.5. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.
On a bien pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > -1$.
⋆ La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n = \sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n}$ converge par le critère de Leibniz car $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est une suite positive, décroissante et qui tend vers 0.
⋆ La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n^2 = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$).
Par la question C.2, on obtient que le produit infini $\prod\limits_{n\geqslant 1} \left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ converge vers un réel ℓ non nul.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a en séparant les termes d'indices pairs et impairs :

$$P_{2n} = \prod_{k=2}^{2n} \left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) = \prod_{p=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{2p+1}}{2p}\right) \times \prod_{p=1}^{n-1} \left(1 + \frac{(-1)^{2p+2}}{2p+1}\right) = \prod_{p=1}^{n} \frac{2p-1}{2p} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{2p+2}{2p+1}.$$

Par décalage d'indice, on a donc :

$$P_{2n} = \frac{\prod\limits_{p=0}^{n-1} (2p+1)}{\prod\limits_{p=1}^{n} 2p} \, \frac{\prod\limits_{p=2}^{n} 2p}{\prod\limits_{p=1}^{n-1} (2p+1)} = \frac{1}{2}.$$

En tant que suite extraite, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{2n} = \ell$ d'où $\ell = \dfrac{1}{2}$.
Ainsi :

$$\boxed{\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{2}.}$$