Révision d'analyse, équations, récurrence
DM 1

Exercice 1 Soit $P : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

1. Trouver un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$.
2. En remplaçant α par la valeur de la question précédente, déterminez $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$P(x) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$$
3. En déduire l'ensemble de définition de la fonction
$$f : x \mapsto \ln(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$$

---

1. On observe que $P(1) = 0$, donc on peut prendre $\boxed{\alpha = 1}$
2. Plusieurs façon de faire. Le plus fréquent dans vos copie est de procéder par identification. Ceci ce rédige comme ceci :
D'une part, $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ et d'autre part :
$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$
Par identification, on a donc $\begin{cases} a1 = 1 \\ b - a &= -2 \\ c - b &= -5 \\ -c &= 6 \end{cases}$
d'où $a = 1, b = -1$ et $c = -6$
D'où $\boxed{P(x) = (x-1)(x^2 - x - 6)}$
On pouvait aussi factoriser directement, soit "de tête", soit via une division euclidienne.
3. La fonction ln étant définie sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x)$ existe si et seulement si $P(x) > 0$.
Or $x^2 - x - 6$ a pour racine -2 et 3 (évidentes, ou via le discriminant), donc on peut écrire que
$$P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$$
Pour discuter du signe de cette expression, je recommande TRES fortement de faire un tableau de signes, c'est à dire un truc comme ça :

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$+$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit immédiatement que f est définie sur $\boxed{]-2;1[\cup]3,+\infty[}$.

Exercice 2 Résoudre selon la valeur de $a \in \mathbb{R}$ le système suivant :
$$\begin{cases} x + 3y + z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ x + 7y &= a \end{cases}$$

On procède à un pivot de Gauss **jusqu'au bout** pour pouvoir discuter efficacement du problème.

$$\begin{cases} x + 3y + z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ x + 7y &= a \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} x + 3y + z &= 1 \\ 4y - z &= -1 \\ 4y - z &= a - 1 \end{cases}$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} x + 3y + z &= 1 \\ 4y - z &= -1 \\ 0 &= a \end{cases}$$

Quelle que soit la valeur de a, le système est de rang 2. Il y a maintenant deux cas :

Si $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$: la dernière ligne est toujours fausse, le système est incompatible. L'ensemble solution est $\boxed{S = \emptyset}$

Si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$: le système est compatible et il y a 3-2=1 inconnue secondaire, qui va servir de paramètre pour exprimer les autres. On peut prendre a priori n'importe laquelle, mais il est plus simple de prendre y.

En procédant par substitution, il vient alors

$$\begin{cases} x + 3y + z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ x + 7y &= a \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -7y \\ y &\in \mathbb{R} \\ z &= 4y + 1 \end{cases}$$

On peut alors écrire que l'ensemble solution est $\boxed{S = \{(-7y, y, 4y+1); y \in \mathbb{R}\}}$.

Exercice 3 Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{2}{n+2} u_n \end{cases}$$

1. Vérifiez que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)^2 - \frac{2n^2}{n+2} - (n+1)^2 \geq 0$$

2. Montrez par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n^2$

---

1. Il suffit de calculer l'expression de gauche et montrer qu'elle est positive. **il n'y a aucun intérêt ici à travailler via des équivalences comme si on résolvait une équation**.

$$\begin{aligned} (n+2)^2 - \frac{2n^2}{n+2} - (n+1)^2 &= n^2 + 4n + 4 - \frac{2n^2}{n+2} - n^2 - 2n - 1 \\ &= 2n + 3 - \frac{2n^2}{n+2} \\ &= \frac{(2n+3)(n+2) - 2n^2}{n+2} \\ &= \frac{7n+6}{n+2} \end{aligned}$$

Comme $n \in \mathbb{N}$, on a $n \geq 0$ et donc $7n + 6 \geq 0$ et $n + 2 \geq 0$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{(n+2)^2 - \frac{2n^2}{n+2} - (n+1)^2 \geq 0}$.

2. Pour simplifier la discussion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n)$ la proposition $u_n \leq n^2$.
Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Initialisation : On a déjà $u_1 = 1 \leq 1^2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et comme $u_2 = u_1 + \frac{2}{0+2} u_0 = 2$, on vérifie également que $u_2 \leq 2^2$, donc que $\mathcal{P}(2)$ est vraie aussi.

Héréditié : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, c'est à dire que $\begin{cases} u_n \leq n^2 \\ u_{n+1} \leq (n+1)^2 \end{cases}$ (H.R.)

Comme $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2} u_n$, l'hypothèse de récurrence sur u_n garanti que $\frac{2}{n+2} u_n \leq \frac{2n^2}{n+2}$, et celle sur u_{n+1} garantit ensuite, par somme d'inégalités, que

$$u_{n+2} \leq (n+1)^2 + \frac{2n^2}{n+2}$$

Or d'après la question 1, $(n+2)^2 - \frac{2n^2}{n+2} - (n+1)^2 \geq 0$, c'est à dire $(n+2)^2 \geq \frac{2n^2}{n+2} + (n+1)^2$

On en déduit donc que

$$u_{n+2} \leq (n+2)^2$$

Ce qui confirme l'hérédité.

Conclusion D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq n^2}$.